Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Akademska 2012/2013.

Euklidska geometrija II
(1. dio)

Dodaci

Euklidska ravan

Sedmica br. 1

Euklidski prostor

Sedmica br. 2, 3 i 4

Euklidska ravan

Sedmica br 5, 6, 7 i 8

Sedmica br. 9, 10, 11 i 12

Sedmica br 13, 14 i 15

Ispitni rokovi

Elementarni zadaci iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Trougao

Računanje uglova u trouglu

1. Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

2. U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

3. Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

4. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A - N - M - B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

5. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

6. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

7. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ ($AC < BC$) visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C,M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

8. Nacrtati trougao $\triangle ABC$, ($\beta > \alpha$) i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Dokazi u vezi trougla

1. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

2. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

3. Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

4. Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

5. Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

6. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednkostraničan.

7. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Četverougao

Paralelogram

1. Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

2. Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

3. Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao akko ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali, dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

4. Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P = a \cdot h$, gdje je $AB = a$, a h udaljenost između stranica AB i CD).

5. Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Pravougaonik i kvadrat

1. Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32} i P_{33}. Za ove površine znamo da vrijedi jednakost $P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = P_{31} + P_{32} + P_{33} = P_{11} + P_{21} + P_{31} = P_{12} + P_{22} + P_{32} = P_{13} + P_{23} + P_{33} = P_{11} + P_{22} + P_{33} = P_{13} + P_{22} + P_{31}$. Ako su $P_{12} = 21$, $P_{13} = 14$, $P_{23} = 19$ i $P_{31} = 20$, diskutovati da li se mogu odrediti površine P_{11}, P_{22} i P_{33}.

2. Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

3. Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Trapez

1. Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P = \frac{1}{2}(a+c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

2. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

3. Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

4. U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Tetivni četverougao, centralni i periferiski ugao

1. Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom $180°$.

2. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Pravilni mnogouglovi

1. U dati pravilni šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ima $ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB||ED$, $BC||EF$, $CD||AF$) i dijagonale AD, BE i CF se polove). Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

2. Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, gdje je a dužina stranice.

3. Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Polazeći od definicije pravilnog šestougla (pretpostavljajući da više ništa ne znamo o pravilnom šestouglu) dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rotacija i osna simetrija

1. U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I,r)$. Centar opisanog kruga $k''(M,r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A,I]$ i kruga $k'(S,r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

2. Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

3. Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

Konstrukcija prave

1. Data je prava p, tačka A i oštar ugao α. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku A ($A \notin p$) i siječe datu pravu p pod uglom α.

2. Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

3. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

Konstrukcija trougla i četverougla

1. Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

2. Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

3. Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Razni zadaci

1. Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

2. Dat je krug $k_1(O_1,r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2,r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

3. Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A,M) \perp p(C,N)$.

4. Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

5. U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

6. Date su dvije paralelne prave a i b, date su tačke $A \in a$, $B \in b$ i tačka C koja se nalazi "između" pravih a i b. Ako je $\measuredangle CAa = 30°$ i $\measuredangle CBb = 45°$ izračunati ugao $\measuredangle ACB$.

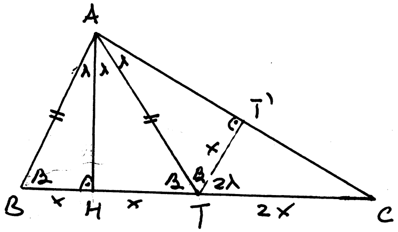
7. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

Euklidska geometrija 1

1. Nabrojati svih pet stavova o podudarnosti trouglova! Koju dodatnu osobinu stav SSU mora zadovoljiti?
2. Četverougao je tetivni akko...
3. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (zbir dva naspremna ugla...).
4. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (uglovi koji gledaju na...).
5. Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice...
6. Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima podudrne one stranice......)
7. Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima najmanje jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno...)
8. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko mu se dijagonale...)
9. Kako glase definicije centralnog ugla nad tetivom, centralnog ugla nad lukom, periferiskog ugla nad tetivom, periferiskog ugla nad lukom (centralni ugao nad tetivom je ugao čiji se vrh nalazi na centru kruga a njegovi kraci prolaze kroz krajnje tačke tetive...)
10. U kakvom su odnosu centralni i periferiski ugao nad tetivom?
11. Zbir oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom iznosi...
12. Šta je π? Šta je stepen? Šta je pravi ugao? Kako pomoću šestara podjeliti ugao na tri dijela sa približnom tačnošću?
13. Šta je srednja linija trougla i koje osobine ima?
14. Kakvu osobinu imaju odsječi tangenti na krug?

\# Težišnica i visina iz vrha A u ΔABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

Rj.



Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.

Primijetimo da je zbog podudarnosti USU $\Delta AHB \cong \Delta AHT$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong HT = x$$

Neka je T' ortogonalna projekcija tačke T na AC.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle TT'A \cong \sphericalangle ABH = 90^\circ \\ \sphericalangle TAT' \cong \sphericalangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta TT'A \cong \Delta BHA$$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong TT' = x \quad i \quad \sphericalangle T'TA \cong \sphericalangle HBA = \beta$$

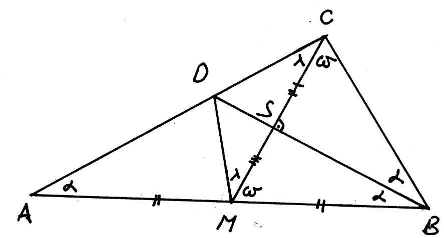
Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle CTT' = 2\lambda$. $\Delta TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

\# U trouglu ΔABC je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\sphericalangle ABC$. Odrediti uglove trougla ΔABC.

Rj.



CM težišna duž

BD simetrala

BD simetrala;

Kako je $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC = 2\alpha$ to je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD$ jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow DM$ visina trougla ΔABD

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle MSB \cong \sphericalangle CSB = 90^\circ \\ BS \cong BS \\ \sphericalangle MBS \cong \sphericalangle CBS = \alpha \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta MBS \cong \Delta CBS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong CS \quad i \quad \sphericalangle BMS \cong \sphericalangle BCS = \omega$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} MS \cong CS \\ \sphericalangle MSD \cong \sphericalangle CSD = 90^\circ \\ DS \cong DS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta MSD \cong \Delta CSD$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle DMS \cong \sphericalangle DCS = \lambda$$

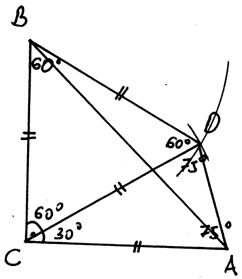
$\gamma = \lambda + \omega$ i $\lambda + \omega = 90^\circ$ (DM je visina ΔABD) $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Dat je jednakokraki-pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\sphericalangle ADB$.

Rj.

a)



ΔBCD jks $\Rightarrow \sphericalangle DBC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDB = 60°$

ΔABC pravougli $\Rightarrow \sphericalangle ACD = 30°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = 75°$

$\sphericalangle ADB = 135°$

b)

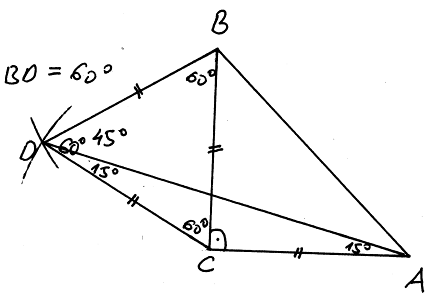
ΔBCD jkk $\Rightarrow \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CBD = 60°$

$\sphericalangle ACD = 150°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

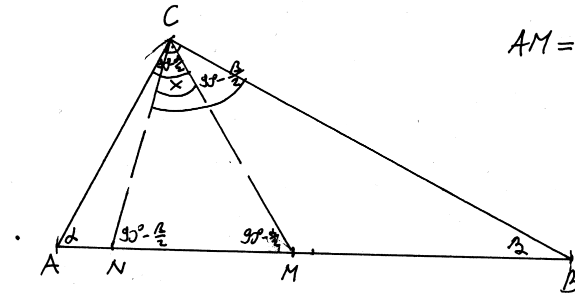
$\Rightarrow \sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = 15°$

$\sphericalangle ADB = 45°$



Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC date su tačke M i N tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A-N-M-B$. Izračunati ugao $\sphericalangle MCN$.

Rj.



$AM = AC \Rightarrow \Delta AMC$ jkk

$\Rightarrow \sphericalangle AMC = \sphericalangle ACM = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$BN = BC \Rightarrow \Delta BCN$ jkk

$\Rightarrow \sphericalangle BNC = \sphericalangle BCN = 90° - \frac{\beta}{2}$

Traženi ugao $\sphericalangle MCN$ označimo sa x. Sad imamo

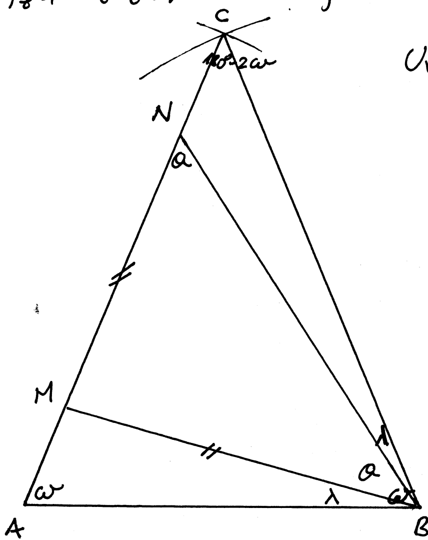
$$\left.\begin{array}{ll} \Delta MCN \Rightarrow & \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + 90° - \frac{\alpha}{2} + x = 180° \\ \sphericalangle BCA \Rightarrow & 90° - \frac{\alpha}{2} + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - x = 90° \end{array}\right\} - \Rightarrow$$

$2x = 90° \Rightarrow x = 45°$

$\sphericalangle NCM = 45°$.

(#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN = \lambda$ (prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \measuredangle MBN \cong \measuredangle BNM = \alpha$.

Sad primjetimo

$\measuredangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\measuredangle BNA$ vanjski ugao ΔNBC to je

$\alpha = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\measuredangle BMA$ vanjski ugao ΔMBN) $\Rightarrow$

$\measuredangle AMB = 2\alpha = 360° - 4\omega + 2\lambda$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$\omega + \lambda + 360° - 4\omega + 2\lambda = 180°$

$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$

$\omega = 60° + \lambda \Rightarrow \alpha = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$

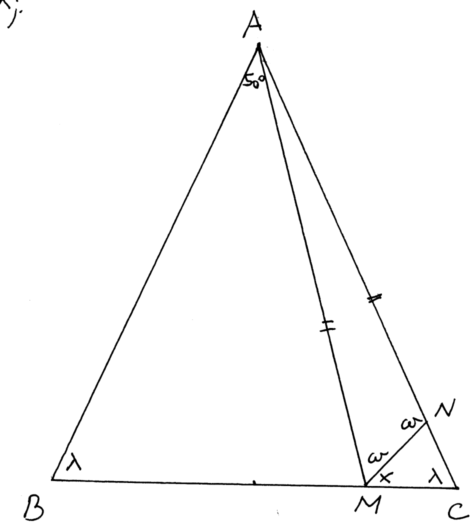
$\alpha = 60° - \lambda$

Na kraju $\measuredangle ABN = \lambda + \alpha = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

$\measuredangle ABN = 60°$.

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$\omega = x + \lambda \quad ...(1)$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$50° + \lambda = \omega + x \quad ...(2)$

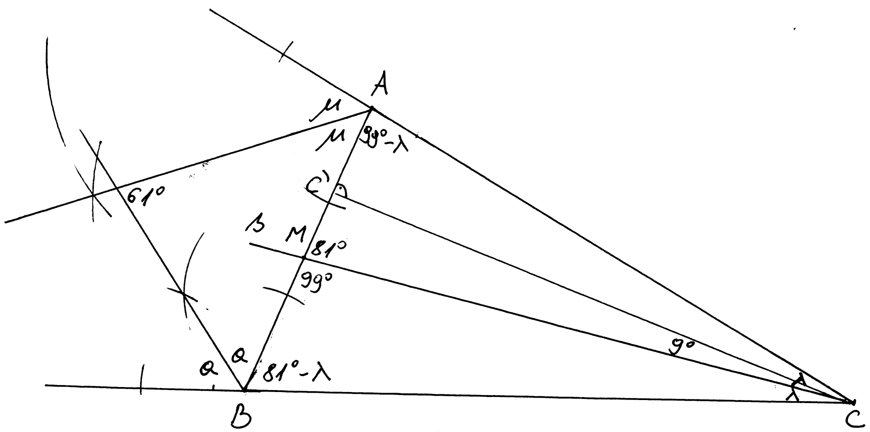
$(1)+(2)$: $\omega + 50° + \lambda = x + \lambda + \omega + x$

$2x = 50°$

$x = 25°$

U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC<BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C,M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\sphericalangle CMC' = 81°$; $\sphericalangle BMC = 99°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 99° - \lambda$; $\beta = 81° - \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu + 99° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \quad \dots (*)$$

$\theta + \mu + 61° = 180°$ $/\cdot 2$

$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$

$2\theta + 2\mu = 238° \quad \dots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$

$180° + 2\lambda = 238°$

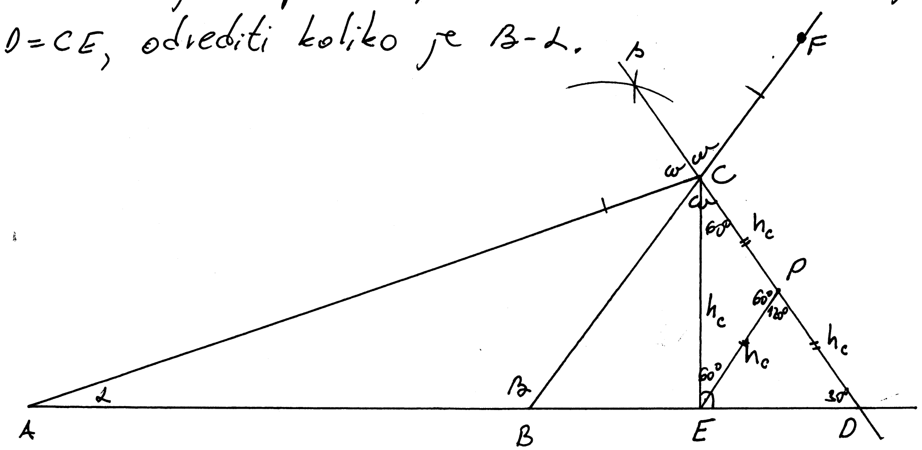
$2\lambda = 58°$

$\lambda = 29°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 70°$, $\beta = 52°$; $\gamma = 58°$

Nacrtaj trougao ΔABC, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina (h_c iz vrha C) siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.



Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\sphericalangle ACF$ označimo sa 2ω (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\sphericalangle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo ΔEDC (pravougli trougao) kod kojeg imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo sredinu stranice CD možemo primijetiti da je $CP \cong DF = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

ΔEPC jks $\Rightarrow$ $\sphericalangle EPC = 60°$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle EPD = 120°$ $\xRightarrow{\Delta EDP \text{ jkk}}$ $\sphericalangle EDP = 30°$.

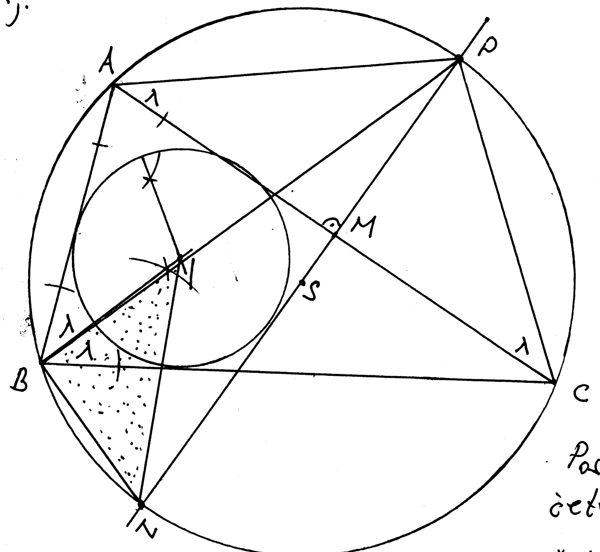
Ugao $\sphericalangle ACF$ vanjski ugao ΔABC $\Rightarrow$ $2\omega = \alpha + \beta$ $\dots (1)$

Ugao $\sphericalangle ABC$ vanjski ugao ΔBDC $\Rightarrow$ $\beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ $\dots (2)$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $2\beta - 60° = \alpha + \beta$ $\Rightarrow$ $\beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je ΔBNI pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove ΔAMP i ΔPMC. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\sphericalangle AMP \cong \sphericalangle CMP = 90^\circ$ (S-M-P i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow}$ $\Delta AMP \cong \Delta CMP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle PCA = \lambda$ i

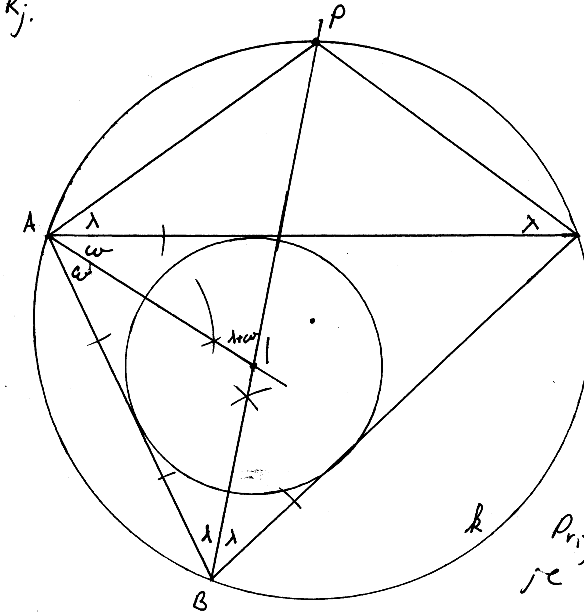
$\sphericalangle PBC \cong \sphericalangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $pp[B,P)$ je simetrala ugla $\sphericalangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

Ugao nad prečnikom je prav pa $\sphericalangle NBP = 90^\circ$ tj.
$\sphericalangle NBI = 90^\circ$ $\Rightarrow$ ΔNBI je pravougli
q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB < BC$), k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle CBP = \lambda$. Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC = \lambda$ i

$\sphericalangle PCA = \sphericalangle ABP = \lambda$

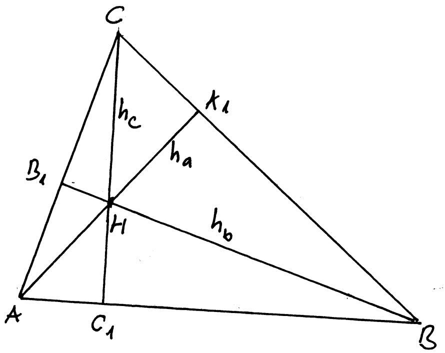
Posmatrajmo sad ΔAIP. Prije toga primjetimo da je $\sphericalangle BAI \cong \sphericalangle CAI = \omega$ (ZAŠTO?)

U trouglu ΔPAI $\sphericalangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\sphericalangle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\sphericalangle PIA = \sphericalangle ABI + \sphericalangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\sphericalangle PAI \cong \sphericalangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk
q.e.d.

(#) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a=2\text{ cm}$, $h_b=4\text{ cm}$ i $h_c=6\text{ cm}$?

Rj.



$h_a=2\text{ cm}$

$$P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

$h_b=4\text{ cm}$

$$P=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{4b}{2}=2b$$

$h_c=6\text{ cm}$

$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{6c}{2}=3c$$

Sad imamo

$a=2b=3c$ tj. $b=\frac{1}{2}a$

$c=\frac{1}{3}a$

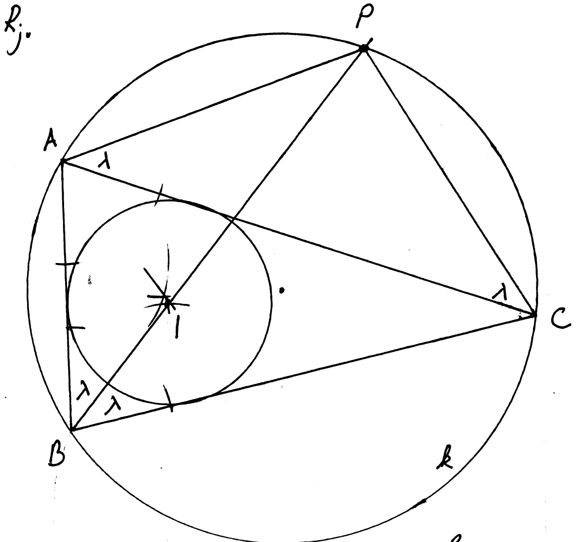
Kako je

$b+c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{5}{6}a$ tj. $b+c<a$

trougao sa datim dužinama visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC $(AB<BC)$. Neka je k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Rj.



P središte luka AC

$\Rightarrow$ P je podjednako udaljena od tački A i C $\Rightarrow$ ΔACP jkk

$\Rightarrow \measuredangle PAC \cong \measuredangle PCA=\lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imamo da

$\measuredangle PBC=\measuredangle PAC=\lambda$ i

$\measuredangle ABP \cong \measuredangle ACP=\lambda$

Pa je BP simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

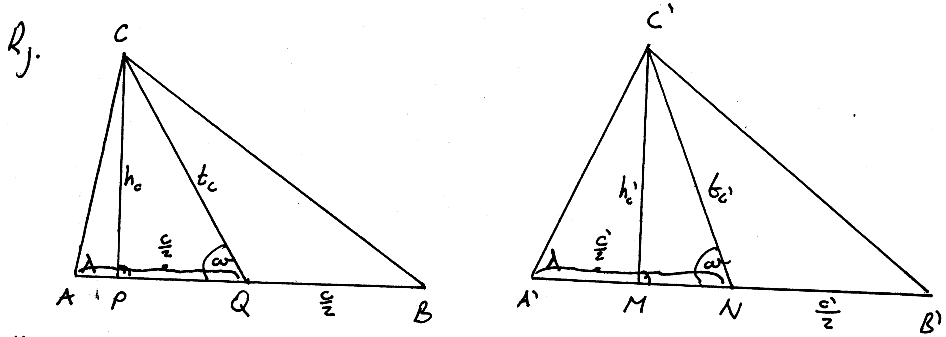
Kako je tačka I presjek simetrala uglova to je

$I\in BP$

q.e.d.

\# Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c'$, $h_c=h_{c'}$ i $t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova C i C'.

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo ΔPQC i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \\ CP \cong C'M \ (h_c=h_{c'}) \\ \sphericalangle CPQ \cong \sphericalangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ugao naspram veće stranice)}]{SSU} \Delta PQC \cong \Delta MNC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega$$

Kako je $c=c'$ to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo ΔAQC i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N \ (\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}) \\ \sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta AQC \cong \Delta A'NC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle CAQ \cong \sphericalangle C'A'N = \lambda$$
$$\text{i } AC \cong A'C'$$

Na kraju posmatrajmo ΔABC i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

q.e.d.

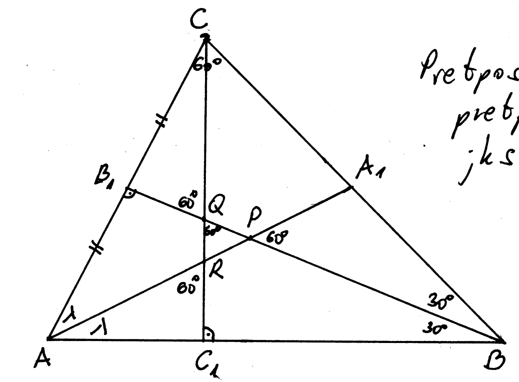
\# Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ CC_1 \text{ visina trougla} \\ AA_1 \text{ simetrala } \sphericalangle BAC \\ BB_1 \text{ težišna duž} \\ AA_1 \cap CC_1 = \{R\},\ AA_1 \cap BB_1 = \{P\} \\ BB_1 \cap CC_1 = \{Q\} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PQR \text{ nije jednakostraničan}$$

— — —

ΔABC je raznostraničan trougao.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je ΔPQR jks, tj. $\sphericalangle RPQ \cong \sphericalangle PQR \cong \sphericalangle QRP = 60^\circ$.

$\Delta AC_1R \Rightarrow \lambda = 30^\circ$

pa je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$

$\Delta C_1BQ \Rightarrow \sphericalangle ABB_1 = 30^\circ$

ΔABB_1 ($\sphericalangle B_1AB = 60^\circ$, $\sphericalangle ABB_1 = 30^\circ$) $\Rightarrow \sphericalangle BB_1A = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong CB_1 \\ \sphericalangle BB_1A \cong \sphericalangle BB_1C = 90^\circ \\ BB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta BB_1A \cong \Delta BB_1C$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABB_1 \cong \sphericalangle B_1BC = 30^\circ$$
$$\text{i } \sphericalangle B_1AB \cong \sphericalangle B_1CB = 60^\circ$$

ΔABC je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

\#kontradikcija

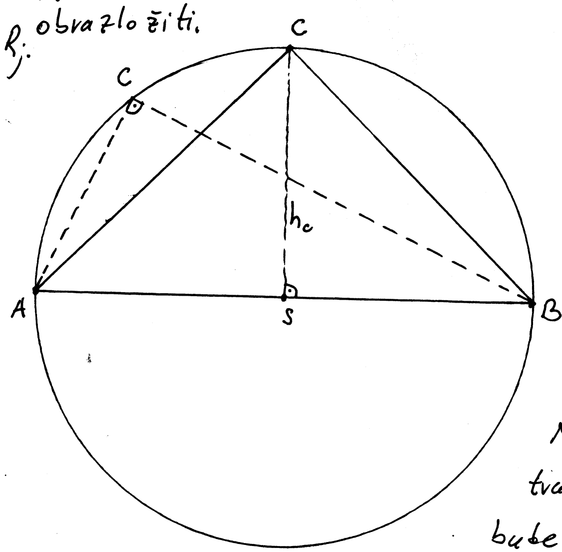
(sa pretpostavkom da je ΔABC raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji ΔPQR)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome ΔPQR ne može biti jks

q.e.d.

Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A,B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

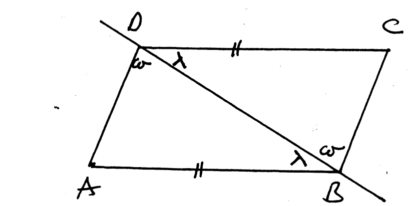
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$. Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

Rj. postavka zadatka

"$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ četverougao} \\ AB \parallel CD \wedge AB \cong CD \end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram



Prema postavci zadatka $AB \parallel CD$. Da bi dokazali da je $\square ABCD$ paralelogram trebamo još pokazati da je $AD \parallel BC$.

$AB \parallel CD \wedge p(B,D)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB = \lambda$

$\left.\begin{array}{l} AB \cong CD \\ \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB = \lambda \\ DB \cong DB \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ABD \cong \Delta CDB$

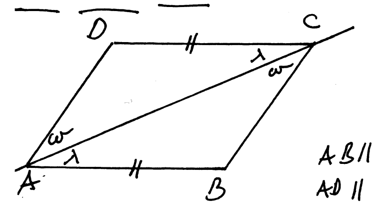
$\Downarrow$

$\sphericalangle BDA \cong \sphericalangle DBC = \omega$ pa na $p(B,D)$ imamo dva ugla $\omega \Rightarrow AD \parallel BC$

$AD \parallel BC \wedge AB \parallel CD \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram q.e.d.

postavka zadatka

"$\Rightarrow$": $\square ABCD$ je paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$, pa da bi završili zadatak ostaje nam ~~samo~~ još da pokažemo da $AB \cong CD$.

$AB \parallel DC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD = \lambda$

$AD \parallel BC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle CAD = \omega$

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD = \lambda \\ AC \cong AC \\ \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle CAD = \omega \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ABC \cong \Delta ADC$

$\Downarrow$

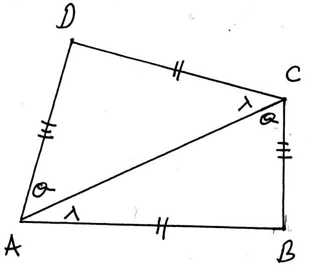
$AB \cong CD$

Prema tome $AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$ q.e.d.

(#) Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao koji ima paralelne suprotne stranice. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

Rj. postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao} \\ AB \cong DC,\ AD \cong BC\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram



Posmatrajmo ΔABC i ΔADC

$$\left.\begin{array}{l}AB \cong CD \\ BC \cong AD \\ AC \cong AC\end{array}\right\} \xrightarrow{SSS} \Delta ABC \cong \Delta ADC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$$

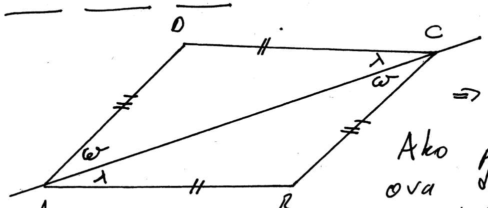
$$\text{i } \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Na pravoj } p(A,C) \text{ imamo } \measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB = \lambda \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \\ \text{i } \measuredangle CAD \cong \measuredangle ACB = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram q.e.d.

postavka zadatka

„$\Rightarrow$" $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \cong DC$ i $AD \cong BC$.



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,C) \parallel p(A,D)$

Ako posmatramo $p(A,C)$ kao transferzalu ova dva para paralelnih pravih

$\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$ i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega$

Posmatrajmo ΔABC i ΔACD

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda \\ AC \cong AC \\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega\end{array}\right\} \xrightarrow{USU} \Delta ABC \cong ADC$$

$$\Downarrow$$

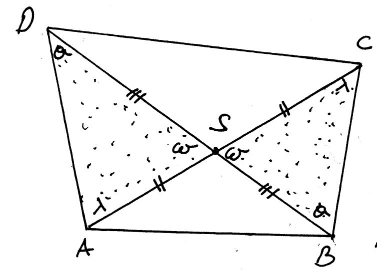
$$AB \cong DC \text{ i } AD \cong BC$$

q.e.d.

(#) Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao akko ima paralelne suprotne stranice (stranice koje su suprotne jedna drugoj). Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj. postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao} \\ AC \text{ i } BD \text{ su dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \\ S \text{ sredina } AC \\ S \text{ sredina } BD\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\left.\begin{array}{l}DS \cong BS \\ \measuredangle ASD \cong \measuredangle BSC = \omega \\ AS \cong CS\end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ASD \cong \Delta BSC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle SAD \cong \measuredangle SCB = \lambda \text{ i}$$

$$\measuredangle SDA \cong \measuredangle SBC = \theta$$

Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA = \lambda$

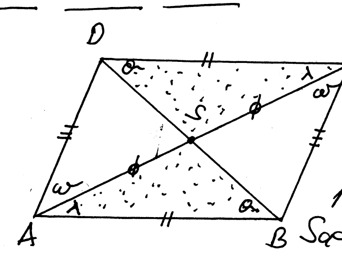
$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(*)

Na pravoj $p(B,D)$ imamo $\measuredangle ADB \cong \measuredangle DBC = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram q.e.d.

postavka zadatka

„$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC,\ BD \text{ dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\}\end{array}\right\} \Rightarrow S$ je sredina AC i S je sredina BD.



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA = \omega$

Na osnovu podudarnost USU $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ADC$

$\Downarrow$

$AB \cong DC$ i $AD \cong BC$

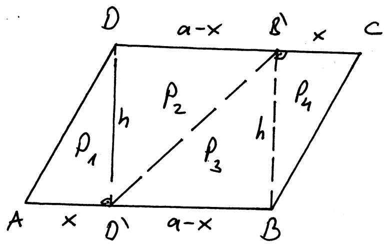
$p(A,B) \parallel p(D,C)$ i $p(B,D)$ transf.

$\Rightarrow \measuredangle ABD \cong \measuredangle BDC = \theta$

Sad ako posmatramo ΔABS i ΔCDS na osnovu pravila USU $\Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CDS \Rightarrow AS \cong CS$ i $BS \cong DS$ q.e.d.

Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P=a\cdot h$, gdje je $AB=a$ a h udaljenost između stranica AB i CD).

Rj:



Označimo stranicu AB sa a. Na osnovu osobina paralelograma znamo da je $AB \cong CD = a$. Neka je D' ortogonalna projekcija tačke D na AB.

Ako je $AD'=x$ tada je $BD'=a-x$. Ostale oznake uvedimo kao na slici.

$$P_{\square ABCD}=P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{x\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{h\cdot x}{2}$$

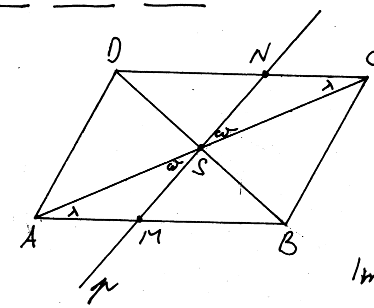
$$=x\cdot h+(a-x)\cdot h=(x+a-x)\,h=a\cdot h$$

$P_{\square ABCD}=a\cdot h$ što je i trebalo dobiti

Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC\cap AB=\{S\},\ \text{prava } p\ni S \\ p\cap AB=\{M\},\ p\cap CD=\{N\}\end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$
$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B)\parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN=\lambda$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN=\lambda \\ AS\cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN=\omega\end{array}\right\} \text{USU} \Rightarrow \triangle ASM \cong \triangle CSN$$

$$\Downarrow$$

$$MS\cong NS$$

$$\Downarrow$$

S sredina MN q.e.d.

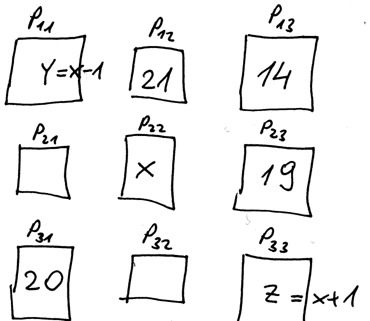
Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}$ i P_{33}. Za ove površine znamo da vrijedi

$$P_{11}+P_{12}+P_{13}=P_{21}+P_{22}+P_{23}=P_{31}+P_{32}+P_{33}=P_{11}+P_{21}+P_{31}=P_{12}+P_{22}+P_{32}=$$

$$=P_{13}+P_{23}+P_{33}=P_{11}+P_{22}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}.$$

Ako su $P_{12}=21$, $P_{13}=14$, $P_{23}=19$ i $P_{31}=20$ diskutovati da li se mogu odrediti površine P_{11}, P_{22} i P_{33}.

Rj.



Površinu P_{22} označimo sa x, P_{11} sa Y. Kako je

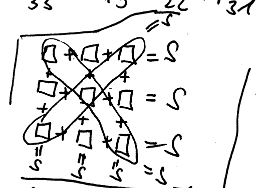
$$P_{11}+P_{12}+P_{13}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$$

to $Y+21+\cancel{14}=\cancel{14}+x+20$

$$Y=x-1.$$

Kako je

$$P_{13}+P_{23}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$$



to

$$14+x+20=14+19+z$$

$$z=x+1$$

Sad kako je $P_{11}+P_{22}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$ to

$$x-1+x+x+1=20+x+14$$

$$3x-x=34$$

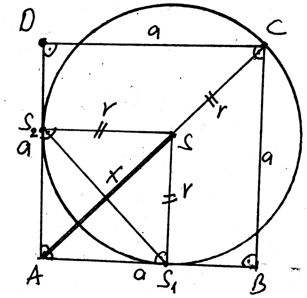
$$x=17$$

$$P_{11}=16,\quad P_{22}=17,\quad P_{33}=18.$$

Tražene površine se mogu odrediti kao i P_{21} i P_{32} (15 i 13).

Zadan je kvadrat □ABCD dužine stranice 1 dm. Nađi poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2. Primjetimo da je četverougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po 90° i $SS_1 \cong SS_2 = r$).

Označimo sa x stranicu AS. U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2=a^2+a^2$ tj.

$$(x+r)^2=2 \Rightarrow x+r=\sqrt{2} \quad \ldots (1)$$

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2=r^2+r^2 \Rightarrow x^2=2r^2 \Rightarrow x=r\sqrt{2}$

$$(1) \Rightarrow r\sqrt{2}+r=\sqrt{2}$$

$$r(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$$

tj. $r=2-\sqrt{2}$ q.e.d.

11)

$\triangle ABC$

Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj. Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot d=5 \\ b\cdot d=3 \Rightarrow d=\frac{3}{b} \\ e\cdot b=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot d=5 \\ a\cdot\frac{3}{b}=5 \\ 3a=5b \\ a=\frac{5}{3}b \end{array} \qquad e\cdot a=e\cdot\frac{5}{3}b=\frac{5}{3}eb=5\cdot 3=15$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d=3 \Rightarrow d=\frac{3}{b} \\ b\cdot e=9 \\ c\cdot d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\cdot d=2 \\ c\cdot\frac{3}{b}=2 \\ 3c=2b \\ c=\frac{2}{3}b \end{array} \qquad e\cdot c=e\cdot\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}eb=\frac{2}{3}\cdot 9=6$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot b=9 \Rightarrow e=\frac{9}{b} \\ e\cdot c=6 \\ f\cdot c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e\cdot c=6 \\ \frac{9}{b}\cdot c=6 \\ 9c=6b \ /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2b=3c \\ b=\frac{3}{2}c \end{array} \qquad f\cdot b=f\cdot\frac{3}{2}c=\frac{3}{2}\cdot 2=3$$

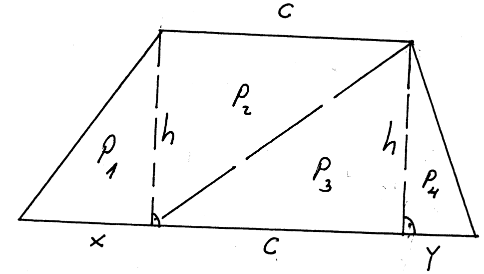
$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e=15 \Rightarrow e=\frac{15}{a} \\ e\cdot b=9 \\ f\cdot b=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e\cdot b=9 \\ \frac{15}{a}\cdot b=9 \\ 15b=9a \ /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3a=5b \\ a=\frac{5}{3}b \end{array} \qquad f\cdot a=f\cdot\frac{5}{3}b=\frac{5}{3}\cdot 3=5$$

$10+30+10$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P=\frac{1}{2}(a+c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

Rj. Odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? ostavljamo za vježbu. (uputa: nije).



Uvedimo oznake kao na slici ($a=x+c+y$).

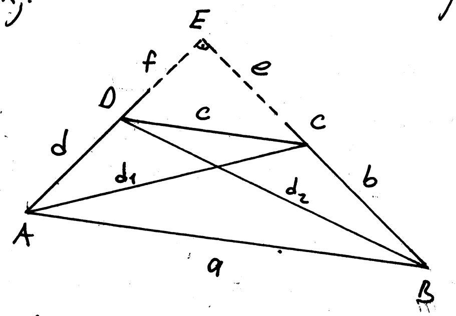
$$P_{trapeza}=P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{x\cdot h}{2}+\frac{h\cdot c}{2}+\frac{c\cdot h}{2}+\frac{h\cdot y}{2}$$

$$=\frac{(x+c+y)h+c\cdot h}{2}=\frac{ah+ch}{2}$$

Prema tome $P=\frac{1}{2}(a+c)h$.

Ako su kraci trapeza međusobno normalni; dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$$d_1^2=(d+f)^2+e^2 \quad \dots(1)$$

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$$d_2^2=(b+e)^2+f^2 \quad \dots(2)$$

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2=(d+f)^2+(e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2=e^2+f^2$

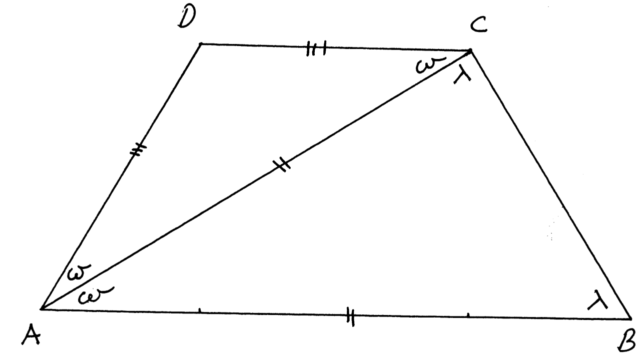
$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2+d_2^2=(d+f)^2+e^2+(b+e)^2+f^2=a^2+c^2$

tj. $\quad d_1^2+d_2^2=a^2+c^2$

q.e.d.

Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

Rj.



jkk trapez $\square ABCD$ ima podudarne stranice AD i BC, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

AB je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to

ΔABC jkk sa $AB \cong AC$ i ΔADC jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo

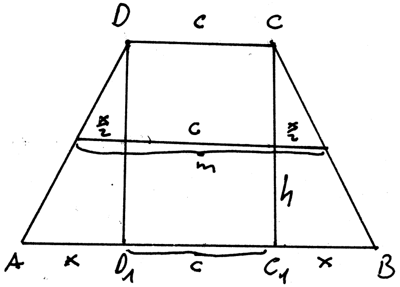
$$2\omega=\lambda$$
$$\underline{2\lambda+\omega=180^\circ \quad /\cdot 2}$$

$$4\lambda+2\omega=360^\circ$$
$$5\lambda=360^\circ$$
$$\lambda=72^\circ \Rightarrow \omega=36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A=72^\circ, \quad \measuredangle B=72^\circ, \quad \measuredangle C=108^\circ, \quad \measuredangle D=108^\circ$

U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike.



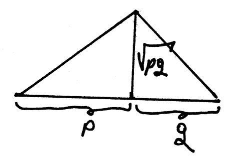
I način:

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot h = m\cdot h$$

$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow h=\sqrt{(x+c)\cdot x}$

$m=5 \Rightarrow x+c=5 \Rightarrow h=\sqrt{5x}$ $\qquad AC^2=10^2=100$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25+5x \Rightarrow$ $\quad 5x=75$, $x=15$

$h=\sqrt{75} = \sqrt{3\cdot 25} = 5\sqrt{3}$ $\qquad P = 25\sqrt{3}\ cm^2$

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a+c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$.

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

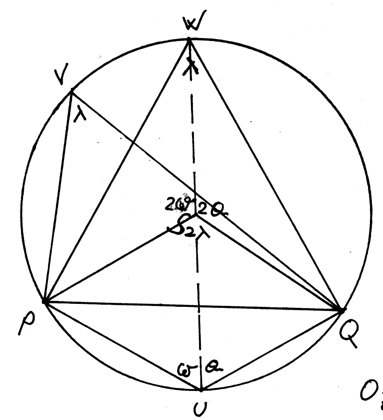
$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$P = 5\cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\ cm^2$

Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

Rj.



PQ tetiva

$\measuredangle PUQ$ tupi periferski ugao nad tetivom PQ

$\measuredangle PVQ$ oštri periferski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$.

Neka je $\measuredangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\measuredangle PVQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\measuredangle PWQ$ oštri periferski ugao nad tetivom PQ

pa je $\measuredangle PWQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ \overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle PVQ = \measuredangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\measuredangle PUW = \omega$ i $\measuredangle QUW = \alpha$

(ovo su oštri periferski uglovi nad tetivama PW i QW)

tada na osnovu prvog zadatka imamo

$\measuredangle PSW = 2\omega$ i $\measuredangle QSW = 2\alpha$.

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\alpha = 360°$ $\quad /:2$

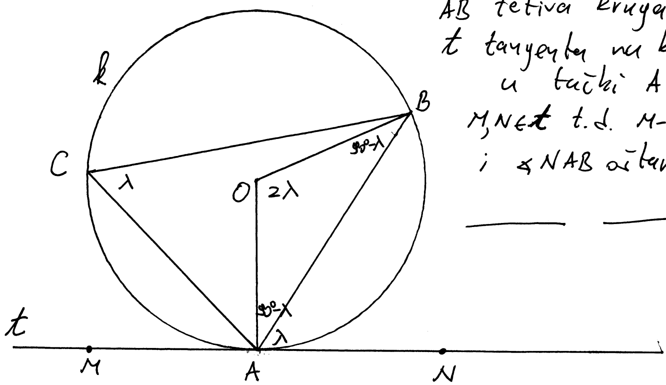
$\lambda + \omega + \alpha = 180°$

tj. $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$

q.e.d.

Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$k(O,r)$ dati krug
AB tetiva kruga
t tangenta na krug u tački A
$M,N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$

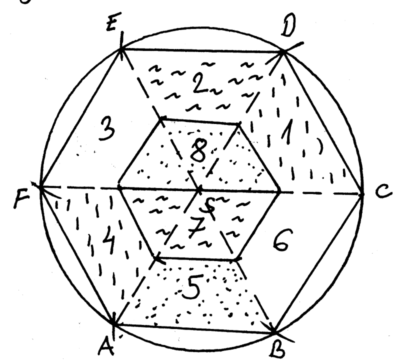
$\measuredangle ACB=\lambda \Rightarrow \measuredangle AOB=2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90°-\lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN=\lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN=\lambda$

q.e.d.

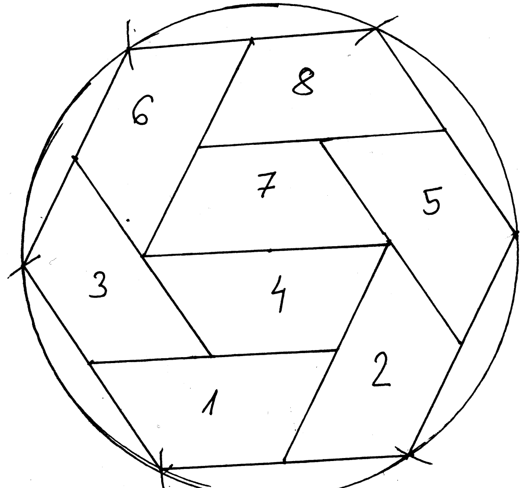
U dati pravilan šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova. (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao $\Delta ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$) i dijagonale AD, BE i CF se polove.) Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

Rj.



Označimo sa S presjek dijagonala. Posmatrajmo srednje linije trouglova ΔABS, ΔBCS, ΔCDS, ΔEDS, ΔEFS. Srednje linije ovih trouglova su podudarne među sobom. Ovo nas lagano vodi do rješenja zadatka. (vidi sliku lijevo)

Iskoristivši neke druge osobine možemo riješiti zadatak i na drugi način:



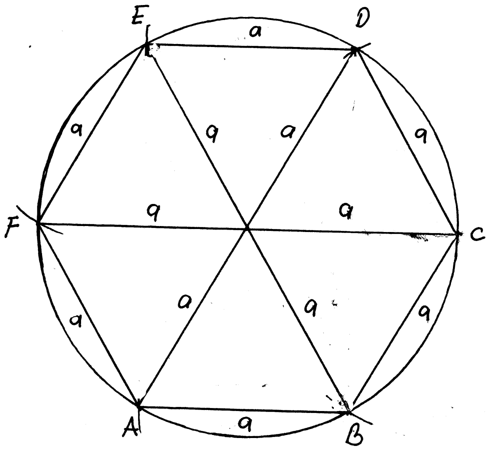
Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla ($P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$).

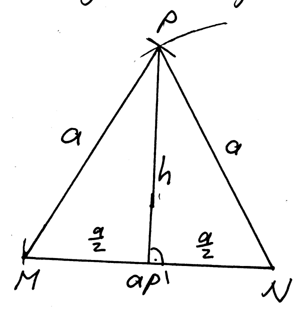
Rj:

Pravilan šestougao se sastoji od 6 jks trouglova! (ovo nije teško dokazati)

Posmatrajmo jks $\triangle MNP$.

$$P_{\triangle MNP} = \underbrace{P_{\triangle PP'M}}_{\text{pravougli } \triangle} + \underbrace{P_{\triangle PP'N}}_{\text{pravougli } \triangle} = \frac{\frac{a}{2} \cdot h}{2} + \frac{\frac{a}{2} \cdot h}{2}$$





$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

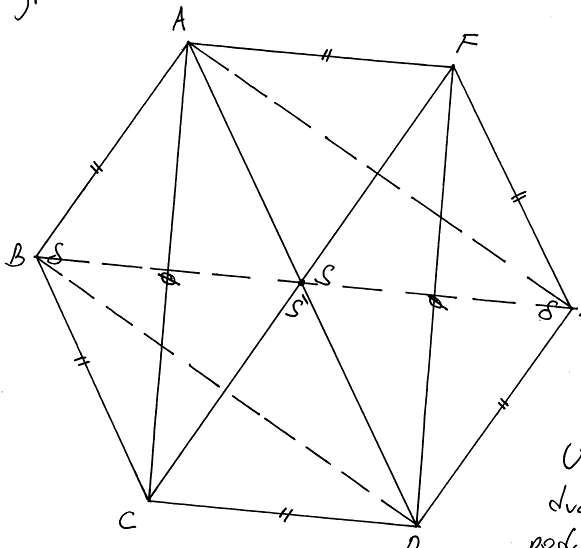
$$P_{\triangle MNP} = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = 6 \cdot P_{\triangle MNP} = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj:



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.

Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong EF \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ACDF$ imamo dva para naspramnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

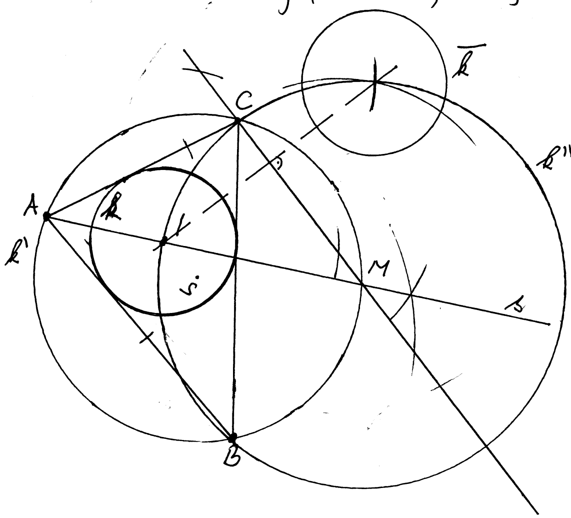
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow \text{dijagonale } AD, CF \text{ i } BE \text{ se sijeku u tački } S$$

q.e.d.

\# U ΔABC je upisan krug k sa centrom u I. Centar opisanog kruga k'' oko ΔBCI nalazi se na presjeku $p[A,I)$ i kruga k' koji je opisana oko ΔABC. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

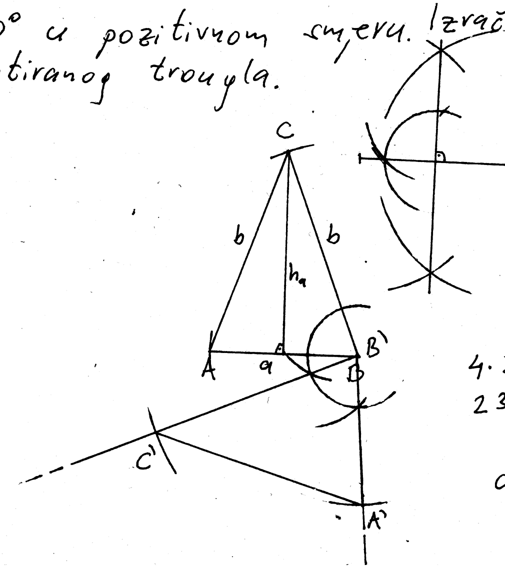
Rj. Prvo ćemo nacrtati $k'(S, r')$, pa ćemo nacrtati ΔABC, pa simetralu s ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M, r'')$ i na kraju $k(I, r)$



$$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$$

\# Jednakokraki trougao ΔABC čiji je obim $O = 64$ cm, a visina na osnovici $h_a = 24$ cm rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\Delta A'B'C'$ i ΔABC podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad / \cdot 4$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$4b^2 = (64-a)^2 = 4096 - 128a + a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

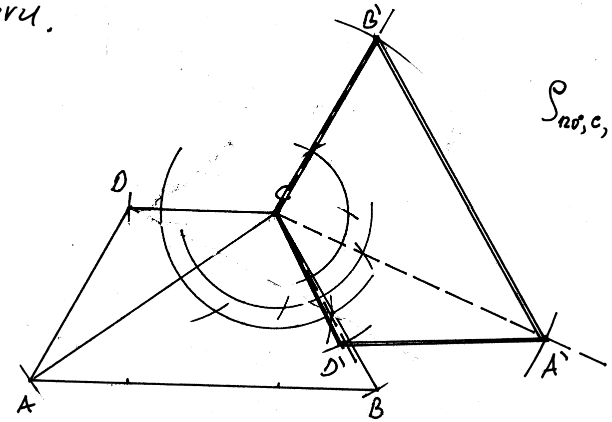
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168$ cm^2

Jednakokraki trapez □ABCD sa osnovicom AB = 7 cm rotirati oko tačke C za ugao od 120° u pozitivnom smjeru.

Rj.

$S_{120^\circ, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$

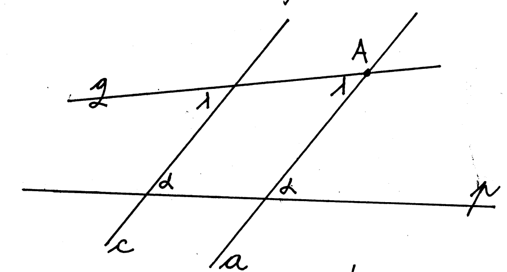


Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu p pod uglom α.



Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primjetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa g označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

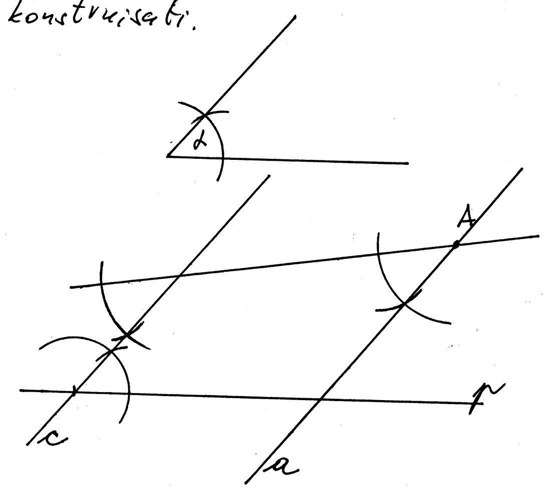
Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α

2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α

3. proizvoljnu pravu g takvu da siječe prav . da sadrži tačku A.

4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

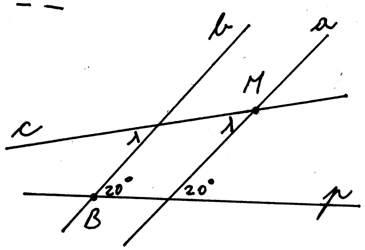
Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

\# Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno).

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

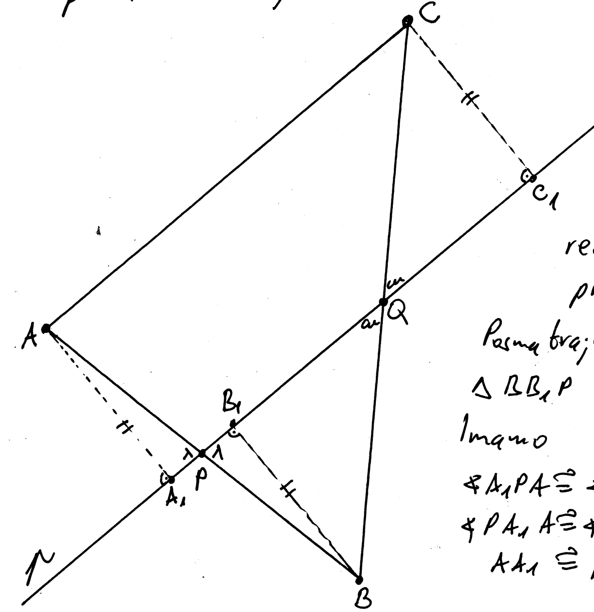
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c. Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

\# Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je poredak tački kao na slici. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.



Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

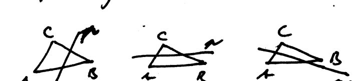
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A_1PA \cong \sphericalangle B_1PB = \lambda \\ \sphericalangle PA_1A \cong \sphericalangle PB_1B = 90° \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B_1QB \cong \sphericalangle C_1QC = \omega \\ \sphericalangle BB_1Q \cong \sphericalangle CC_1Q = 90° \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primjetiti da prava p prolazi kroz sredine stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

Diskusija

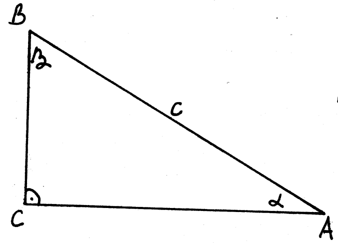


Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

R: Analiza

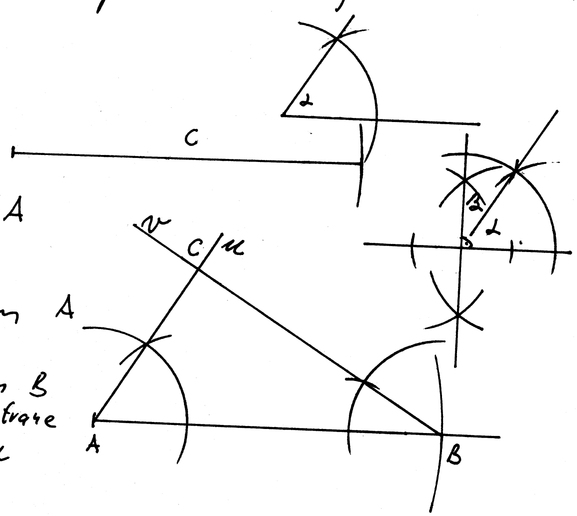
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC pravougli trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90° - \alpha$. ($\alpha+\beta+90°=180°$)



Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na nju, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija

1. α, c ($\alpha < 90°$)
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\sphericalangle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\sphericalangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

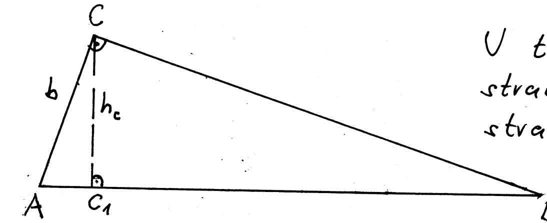
Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

Konstruisati pravougli trougao ΔABC ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data kateta b, visina h_c i neka je ΔABC traženi pravougli trougao.

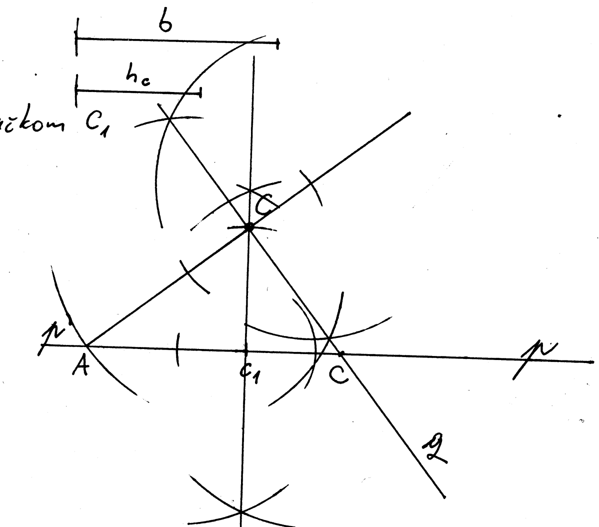
$CC_1 = h_c$.



U trouglu ΔAC_1C imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\sphericalangle ACB = 90°$ to ćemo tačku B dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži C i okomita je na $p(A, C)$. Pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. b, h_c
2. polupravu p' sa početnom tačkom C_1
3. n, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu p, $p \supseteq p'$
7. pravu q, $q \ni C$ i $q \perp p(A,C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete b i visinu h_c slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja

Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

\# Konstruisati četverougao □ABCD ako su date dužine njegovih stranica AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 5 cm i AD = 7 cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

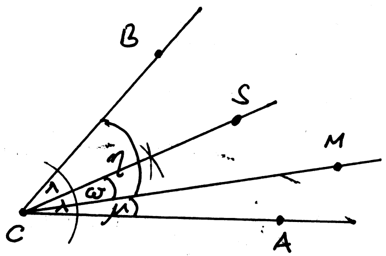
Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znamo samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

U četverougao se može upisati krug

$AB + CD = BC + AD$ (četverougao je tangentni)

\# Zadani su ugao ∢ACB, poluprava CM unutar ugla ∢ACB i poluprava CS koja polovi ∢ACB. Dokazati da je $\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCA - \sphericalangle MCB)$.

Rj.



Uvedimo oznake:

$\lambda = \sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB$

$\omega = \sphericalangle SCM$

$\mu = \sphericalangle MCA$ i $\eta = \sphericalangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

tj. $\sphericalangle SCM = \sphericalangle ACS - \sphericalangle MCA$

$\sphericalangle SCM = \sphericalangle MCB - \sphericalangle SCB$ + ($\sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB$)

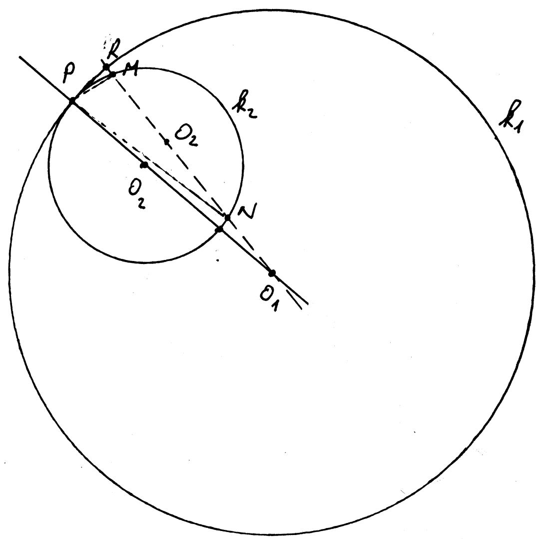
$2\sphericalangle SCM = \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA$

$\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA)$

q.e.d.

\# Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak $O_1 - N - O_2 - M$. Neka je R tačka na k_1 t.d. $N - M - R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\measuredangle MPN = 90°$. Kako je $\measuredangle MPO_1 > \measuredangle MPN \Rightarrow \measuredangle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

\# kontradikcija

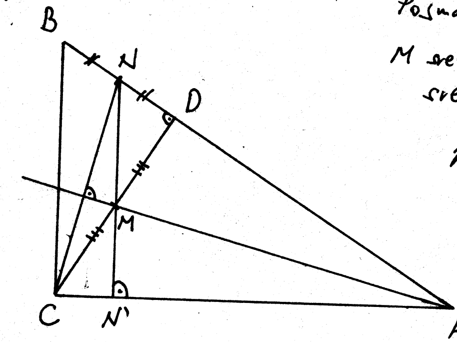
(PO_1 i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je $O_1 - M - R$ to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

q.e.d.

\# Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.



Posmatrajmo $\triangle CDB$.

M središte CD, N središte BD $\Rightarrow$ MN je srednja linija $\triangle CDB$ $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$ tj. $p(M,N) \parallel p(C,B) \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

Posmatrajmo $\triangle ACN$ (Neka je $\{N'\} = p(M,N) \cap AC$)

CD visina na AN, NN' visina na AC

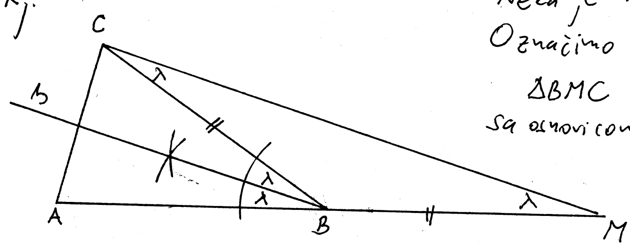
$\Rightarrow$ M ortocentar trougla $\triangle ACN$.

Kako se visine sijeku u istoj tački $\Rightarrow p(A,M) \perp p(C,N)$

q.e.d.

Na pravoj $p(A,B)$ trougla ΔABC data je tačka M takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj.



Neka je s simetrala ugla $\sphericalangle ABC$.
Označimo sa $\lambda = \sphericalangle ABS \cong \sphericalangle CBS$

ΔBMC jkk sa osnovicom MC $\Rightarrow \sphericalangle BMC = \sphericalangle MCB$

Kako je $\sphericalangle ABC = 2\lambda$ i

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BMC + \sphericalangle MCB$

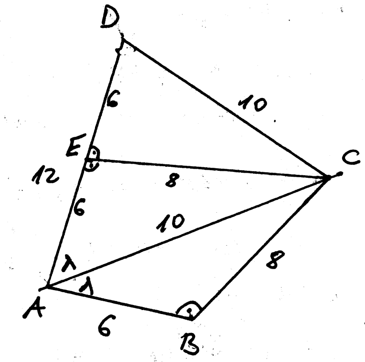
$\Rightarrow \sphericalangle BCM \cong \sphericalangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\sphericalangle ABS = \sphericalangle AMC = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\sphericalangle BAD$.

Rj.



$AB < BC$, $BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD$, $CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD$, $AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36$ cm $\Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8$, $CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

ΔECD je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \sphericalangle AEC \cong \sphericalangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

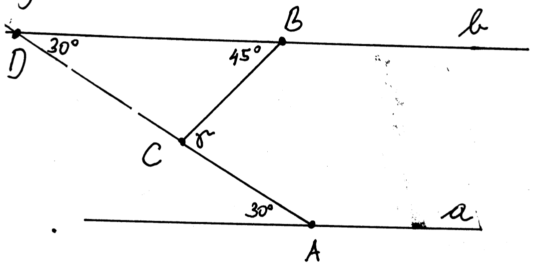
$$P_{\Delta ACD} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P_{\square ABCD} = 72 \text{ cm}^2$$

Date su dvije paralelne prave a i b, tačke $A \in a$, $B \in b$ i C koja se nalazi "između" pravih a i b. Ako je $\measuredangle CAa = 30^\circ$ i $\measuredangle CBb = 45^\circ$ izračunati ugao $\measuredangle ACB$.

Rj.:



$\gamma = ?$

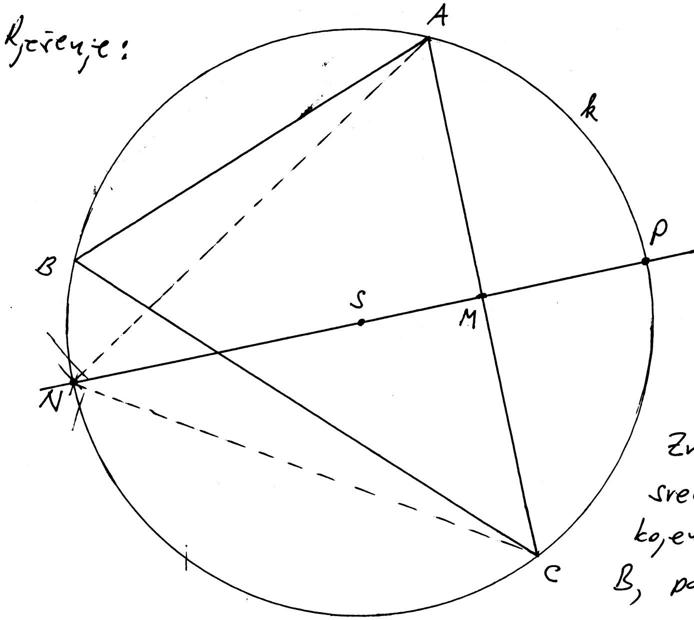
Neka je $p(A,C) \cap b = \{D\}$ (vidi sliku lijevo).

$a \parallel b \overset{\measuredangle CAa = 30^\circ}{\Longrightarrow} \measuredangle CDB = 30^\circ$

γ je vanjski ugao $\triangle BDC \Rightarrow \gamma = 75^\circ$.

Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka $\overset{\frown}{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku presjeka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\overset{\frown}{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \ (M \text{ sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ANM \cong \triangle CNM$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AMN \cong \measuredangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow NP$ je prečnik opisane kružnice.

Elementarni zadaci iz **Euklidske geometrije II**

Sličnost trouglova

1. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

2. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

3. Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

4. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

Talesova teorema

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

2. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Omjeri u trouglu

1. U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

2. Ako jednakostraničnom trouglu $\triangle ABC$ (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

4. Centar upisanog kruga u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu $12 : 5$. Ako je dužina kraka trougla $60\,cm$, naći dužinu osnovice tog trougla.

5. Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Deltoid

1. Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke $37\,cm$ i $54\,cm$. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Crtanje duži

1. Date su duži a i b $(b < 1 < a)$. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$.

2. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{3}a - a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

3. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži $(a < 1 < b)$.

4. Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

5. Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

Trigonometrija

1. (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$.

2. Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB = a$, $BC = b$, $AC = p$ i $BD = q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ (uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu).

Konstrukcije četverouglova

1. Dat je $\triangle ABC$ i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla $\triangle ABC$ i čija je jedna stranica jednaka dužini duži DE.

Konstrukcije trougla

1. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Računanje površine tijela u ravni

1. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

1. Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Krug

1. Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

2. Date su prave t, q i s takve da $q \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $q \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da je $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in q$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

3. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P, Q)$ i $p(M, N)$ dokazati da je $p(S, E)$ tangenta na krug k_1 i na krug k_2.

Konstrukcija prave u zadacima u kojima se pojavljuje i krug

1. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

2. Date su dvije podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

3. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Konstrukcija kruga

1. Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A, B) || t$. Konstruisati krug kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t.

2. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

Razni zadaci

1. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2}AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

2. Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

3. Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

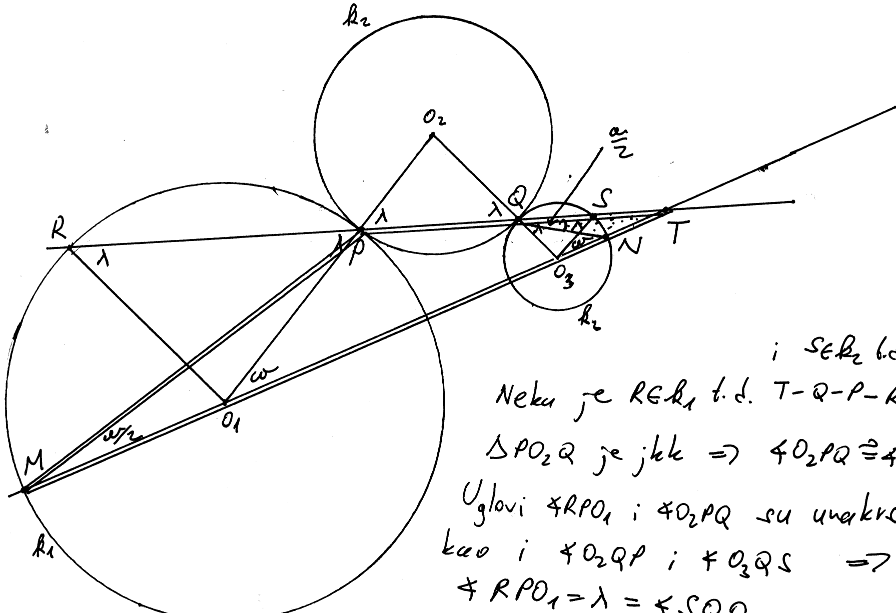
4. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

5. U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

6. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_2 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi ΔTNQ i ΔTPM slični.

Rj.



i $S \in k_2$ t.d. $T-S-Q$

Neka je $R \in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$

ΔPO_2Q je jkk $\Rightarrow \sphericalangle O_2PQ \cong \sphericalangle O_2QP = \lambda$.

Uglovi $\sphericalangle RPO_1$ i $\sphericalangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\sphericalangle O_2QP$ i $\sphericalangle O_3QS$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle RPO_1 = \lambda = \sphericalangle SQO_3$

Kako su ΔPO_1R i ΔSO_2Q jkk $\Rightarrow \sphericalangle PRO_1 = \lambda$ i $\sphericalangle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\sphericalangle RSO_3 \cong \sphericalangle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow \quad PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle SO_3T \cong \sphericalangle PO_1T = \omega$.

Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\sphericalangle O_1MP$ i $\sphericalangle NQS$. Sad imamo

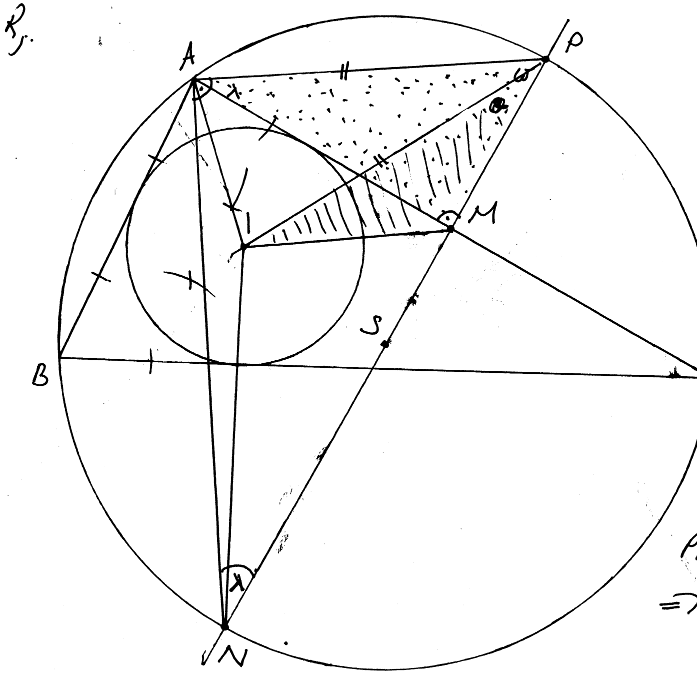
$\sphericalangle QTN \cong \sphericalangle MTQ$ (zajednički ugao)
$\sphericalangle TQN \cong \sphericalangle TMP = \frac{\alpha}{2}$
$\sphericalangle TNQ \cong \sphericalangle TPM$ (treći ugao)

$\xrightarrow{\text{(slič. UUU)}}$ $\Delta TNQ \sim \Delta TPM$

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\overset{\frown}{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak $P-M-S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $p[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.:

$\sphericalangle AMP = \sphericalangle NAP = 90°$

($\sphericalangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle ANP = \lambda$.

Prema sličnosti UUU

$\Rightarrow \quad \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$ q.e.d.

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.

Sad imamo

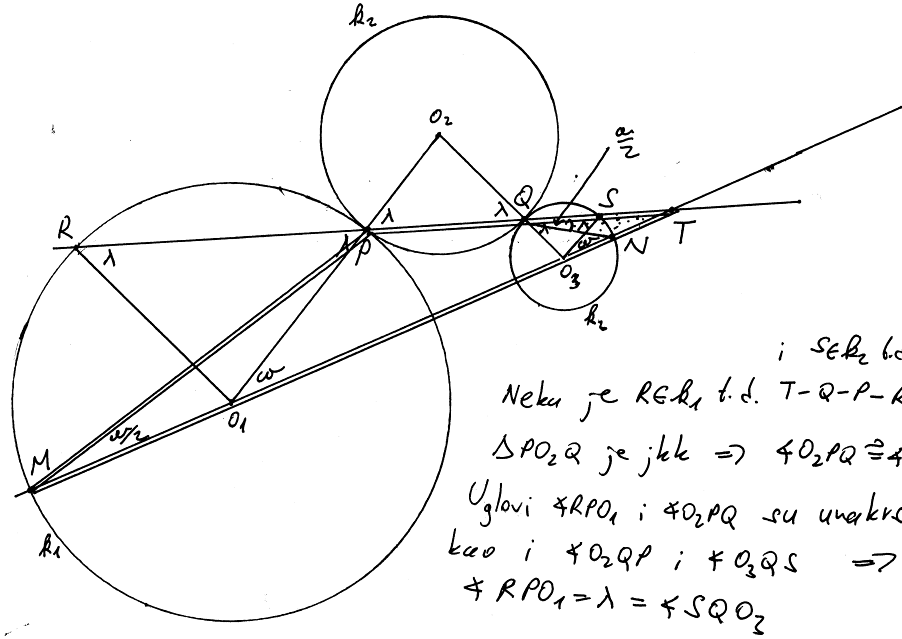
$\frac{PI}{NP} = \frac{MP}{IP}$
$\sphericalangle IPN \cong \sphericalangle MPI = \theta$
(zajednički ugao)

$\xrightarrow{\text{(slič. SUS)}}$ $\Delta PIN \sim \Delta PMI$

q.e.d.

Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi ΔTNQ i ΔTPM slični.

Rj.



i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$

ΔPO_2Q je jkk $\Rightarrow \measuredangle O_2PQ \cong \measuredangle O_2QP = \lambda$,

Uglovi $\measuredangle RPO_1$ i $\measuredangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\measuredangle O_2QP$ i $\measuredangle O_3QS$ $\Rightarrow$ $\measuredangle RPO_1 = \lambda = \measuredangle SQO_3$

Kako su ΔPO_1R i ΔSO_3Q jkk $\Rightarrow \measuredangle PRO_1 = \lambda$ i $\measuredangle QSO_3 = \lambda$. Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\measuredangle RSO_3 \cong \measuredangle RPO_1 = \lambda$ $\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

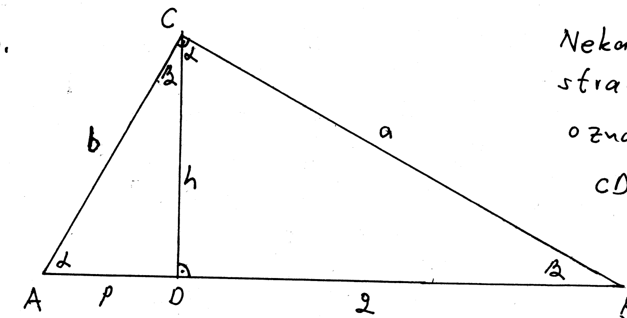
$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle SO_3T \cong \measuredangle PO_1T = \omega$. Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\measuredangle O_1MP$ i $\measuredangle NQS$. Sad imam

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle QTN \cong \measuredangle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \measuredangle TQN \cong \measuredangle TMP = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle TNQ \cong \measuredangle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič UUU)}} \Delta TNQ \sim \Delta TPM$$

q.e.d.

U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$.

U ΔADC, $\measuredangle ADC = 90^\circ$, $\measuredangle CAD = \alpha \Rightarrow \measuredangle ACD = \beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC = 90^\circ$, $\measuredangle DBC = \beta \Rightarrow \measuredangle BCD = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ACB = \measuredangle ADC = 90^\circ \\ \measuredangle CAB = \measuredangle CAD = \alpha \\ \measuredangle ABC = \measuredangle ACD = \beta \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Rightarrow b^2 = cp \quad \dots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ACB = \measuredangle CDB = 90^\circ \\ \measuredangle CAB = \measuredangle BCD = \alpha \\ \measuredangle ABC = \measuredangle DBC = \beta \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Rightarrow a^2 = cq \quad \dots(2)$$

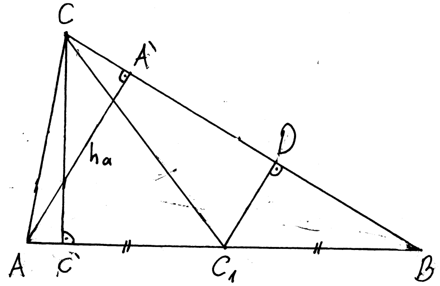
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2 = cq + cp = c(p+q) = c\cdot c = c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB. Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.

Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AA'}{C_1D}$.

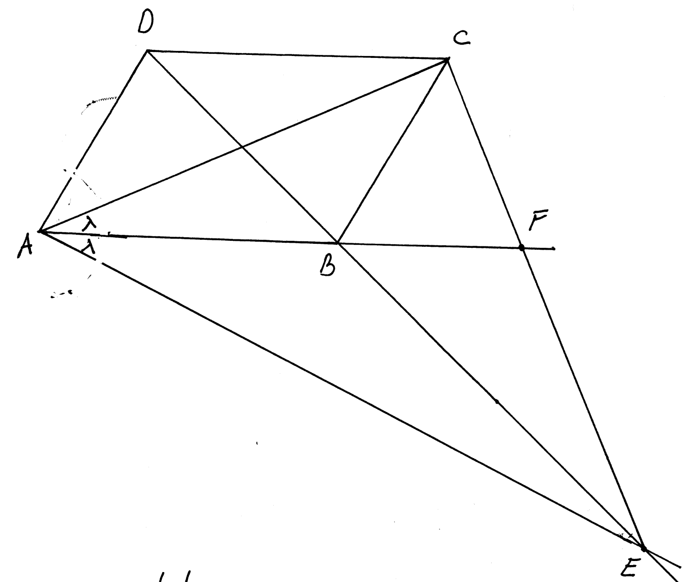
Kako je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

Možemo zaključiti $\frac{AA'}{C_1D} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$\Rightarrow \quad C_1D = \frac{1}{2} h_a$ q.e.d.

Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\sphericalangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

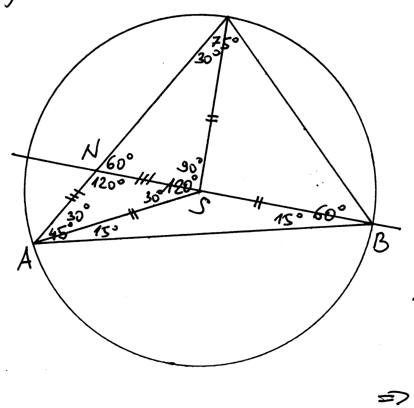
$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \xRightarrow{T.T.} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF}$ ... (*)

Kako je $CD \cong AB \xRightarrow{(*)} \frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$

q.e.d.

U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj.



$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad \gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45° \; ; \; \gamma = 75°$

$\sphericalangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\sphericalangle ASC = 120° \Rightarrow \sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 120° \Rightarrow \sphericalangle ASN = 30° \Rightarrow AN \cong SN$

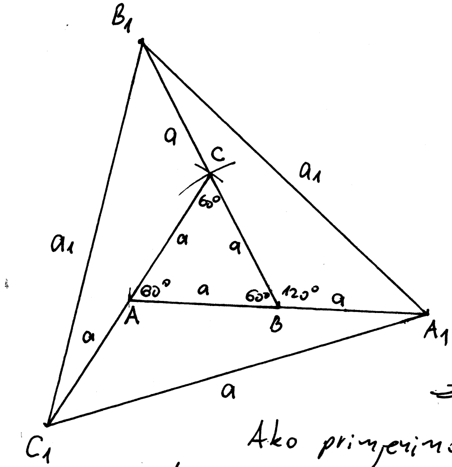
ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN} \Rightarrow CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

Ako jednakostraničnom trouglu ΔABC (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijamo trougao $\Delta A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$?

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike. Dužinu stranice a_1 ćemo odrediti na dva načina.

I način

Primjetimo da kako je ΔABC jks to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$

$\Rightarrow \sphericalangle B_1BA_1 = 120°$.

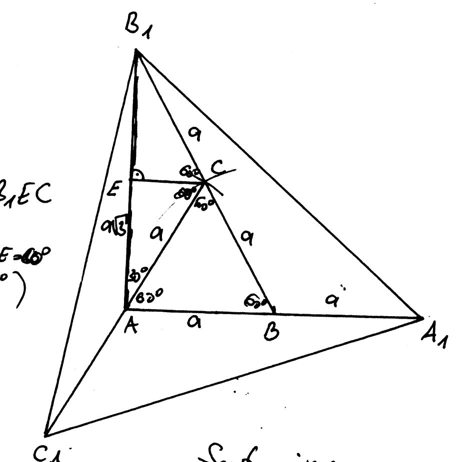
Ako primjenimo kosinusnu teoremu na stranicu a_1 u ΔB_1BA_1 imamo

$$a_1^2 = (2a)^2 + a^2 - 2(2a)\cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$\Rightarrow a_1 = a\sqrt{7}$

II način

Posmatrajmo ΔACB_1 i neka je CE visina tog trougla



$AC \cong CB_1$, $CE \cong CE$, $\sphericalangle CEA \cong \sphericalangle CEB_1 = 90°$ $\overset{SSU}{\Longrightarrow}$ (ugao naspram veće str.) $\Delta AEC \cong \Delta B_1EC$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ECA \cong \sphericalangle B_1CE = 60°$

($\sphericalangle ACB = 120°$)

$\Rightarrow \sphericalangle CAE = 30° \Rightarrow \sphericalangle A_1AB_1 = 90°$

ΔABB_1 pravougli $\overset{Pit.\ teor.}{\Longrightarrow} AB_1^2 = 3a^2$

ΔA_1AB_1 pravougli $\overset{Pit.\ teor.}{\Longrightarrow} A_1B_1^2 = 7a^2$

$\Rightarrow a_1 = a\sqrt{7}$

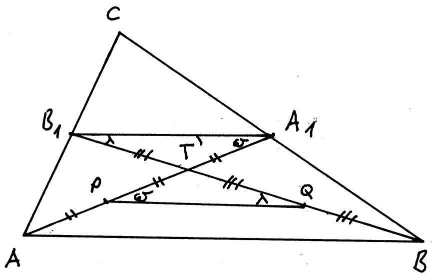
Sad imamo:

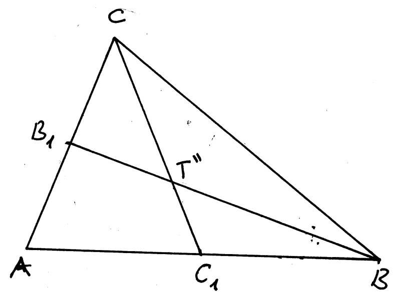
$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a_1 \cdot h}{2} = \frac{a_1\sqrt{a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 7\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\,P_{\Delta ABC}$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = 1:7$$

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu $\triangle ABC$ i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija $\triangle ABC$ pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q sredine redom duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\triangle ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\triangle PQT'$ i $\triangle B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla)

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

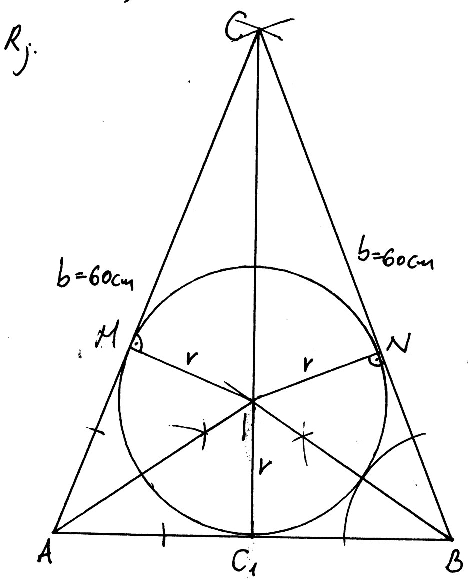
Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12:5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, naći dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove $\triangle AIC$ i $\triangle BIC$. U $\triangle AIC$ visina na stranicu AC je $MI = r$.

U $\triangle BIC$ visina na stranicu BC je $NI = r$.

U $\triangle ABI$ visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AIC} + P_{\triangle BIC} + P_{\triangle ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2} \quad (b = 60\text{cm})$$

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$h = \frac{17}{5} r$ ...(1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad /:r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad /\cdot 10$$

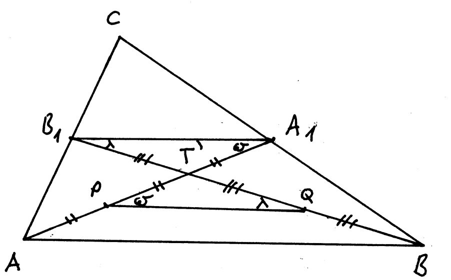
$$17a - 5a = 600$$

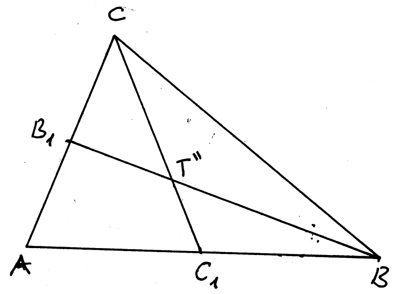
$$12a = 600$$

$a = 50$ cm ← traženo rješenje

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu $\triangle ABC$ i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.
A_1B_1 je srednja linija $\triangle ABC$ pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.
Neka su P i Q sredine redom duži AT' i BT'.
PQ je srednja linija $\triangle ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$
$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\triangle PQT'$ i $\triangle B_1T'A_1$.
Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

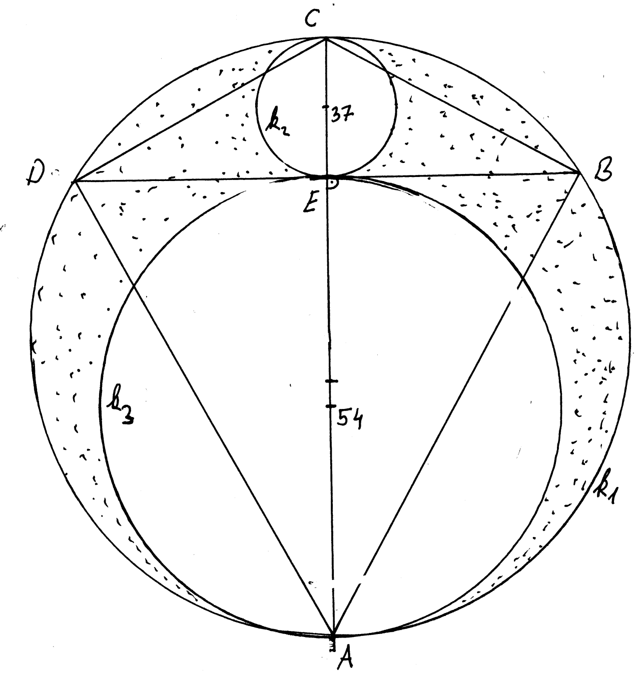
$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.
Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke 37 cm i 54 cm. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Rj.



P je označena na slici istačkano.

$$P_{k_1} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54+37}{2}\right)^2 \pi$$

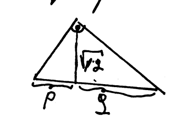
$$P_{k_2} = \left(\frac{EC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{37}{2}\right)^2 \pi$$

$$P_{k_3} = \left(\frac{AE}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54}{2}\right)^2 \pi$$

$$P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3} = \frac{54^2 + 2\cdot 54\cdot 37 + 37^2 - 37^2 - 54^2}{4}\pi$$

$$= 27\cdot 37\,\pi = 999\pi$$

Primjetimo da je $\measuredangle ABC$ u stvari ugao nad prečnikom AC pa je $\measuredangle ABC = 90^\circ$. Od ranije znamo da



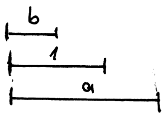
pa $BE = \sqrt{37\cdot 54} = \sqrt{37\cdot 6\cdot 9} = 3\sqrt{222}$

$BD = 6\sqrt{222}$.

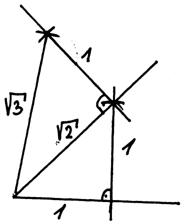
Date su duži a i b $(b<1<a)$. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2 .$$

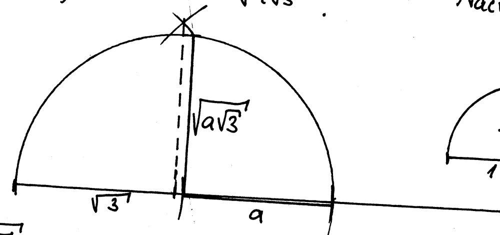
Rj.



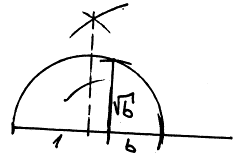
Nacrtajmo duži $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$.



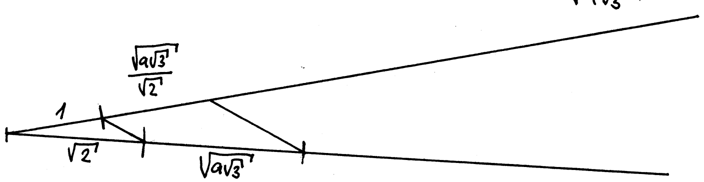
Nacrtajmo duž $\sqrt{a\sqrt{3}}$.



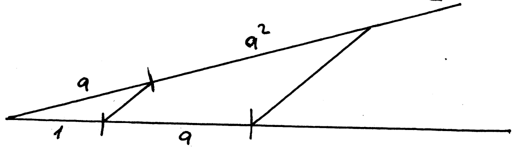
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



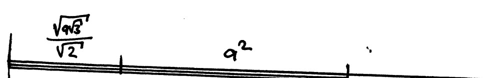
Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. $\quad Y = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a\sqrt{3}}} = \frac{1}{Y}$



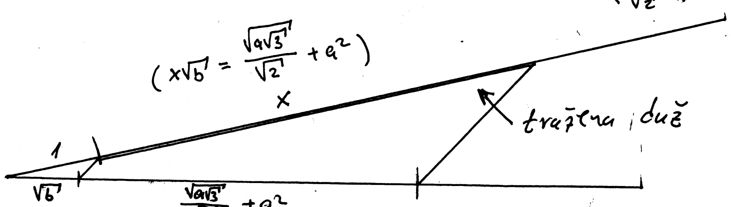
Nacrtajmo duž a^2. $\quad z = a\cdot a \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{z}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$



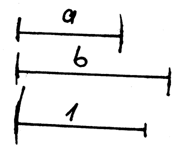
Na kraju, nacrtajmo duž $x = \dfrac{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2}{\sqrt{b}}$. $\quad \left(\dfrac{\sqrt{b}}{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2} = \dfrac{1}{x} \right)$

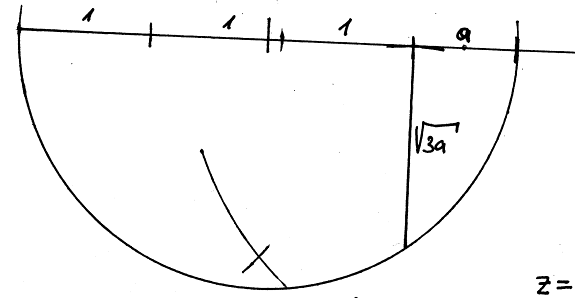


Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3a} - a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b .$$

Rj.



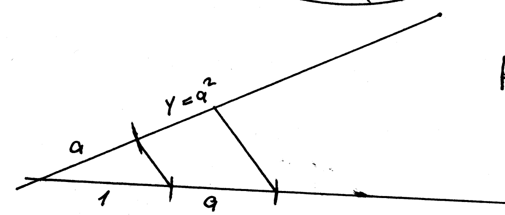


$Y = a^2$

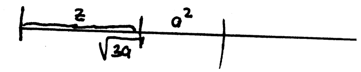
$Y = a\cdot a$

$\frac{Y}{a} = \frac{a}{1}$

$\frac{1}{a} = \frac{a}{Y}$

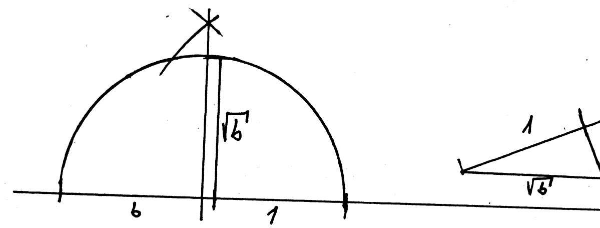


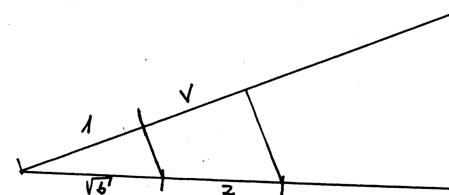
$z = \sqrt{3a} - a^2$



$V = \frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z} = \frac{1}{V}$



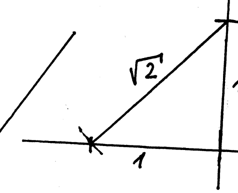


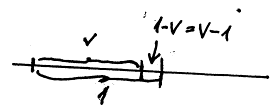
Sad imamo $x\sqrt{2} + 1 = V$

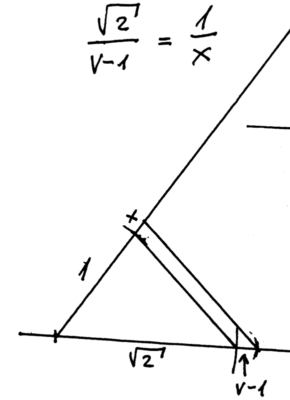
$x\sqrt{2} = V - 1$

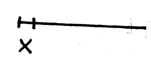
$x = \frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1} = \frac{1}{x}$



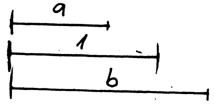




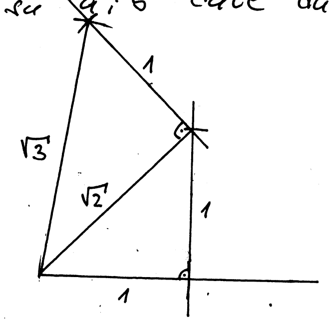


Nacrtati duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$ gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

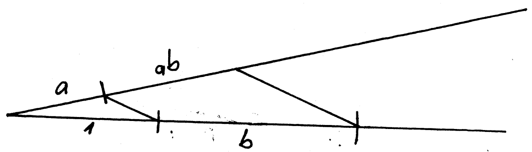


Nacrtajmo duž ab.

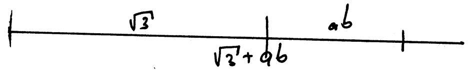
$Y=a\cdot b$

$\dfrac{Y}{a}=\dfrac{b}{1}$

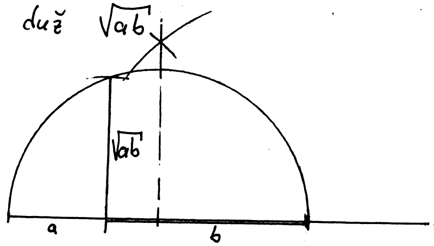
$\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{Y}$



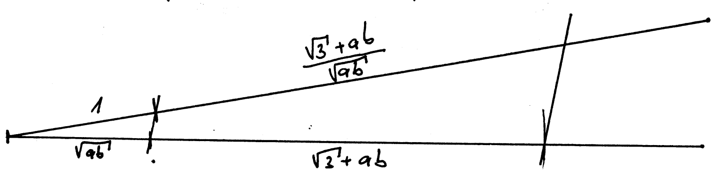
Nacrtajmo duž $\sqrt{3}+ab$



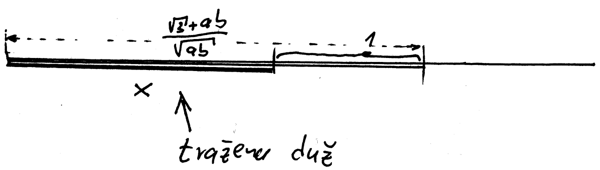
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}$. $\quad z=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}+ab}=\dfrac{1}{z}$

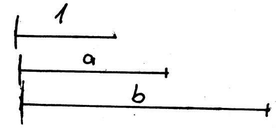


Na kraju nacrtajmo duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$

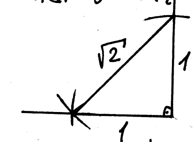


Nacrtati duž $x=\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:

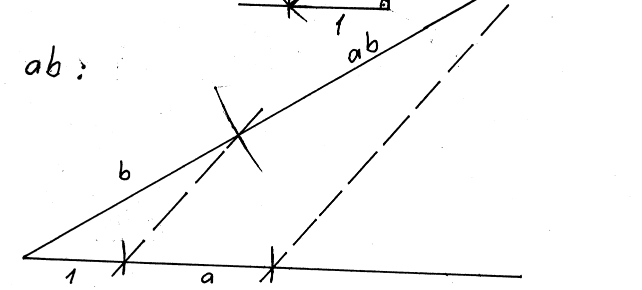


Konstruišimo duž ab:

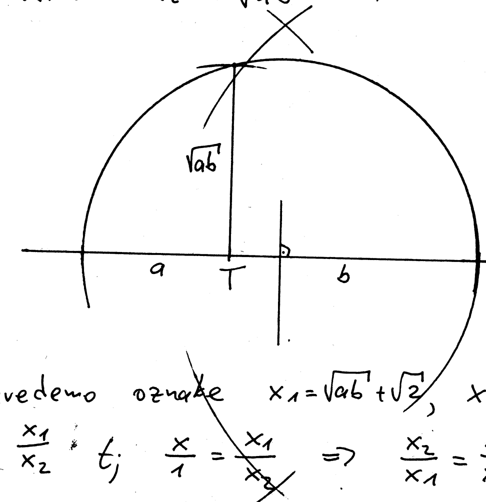
$x_1=ab \quad /:b$

$\dfrac{x_1}{b}=\dfrac{a}{1}$

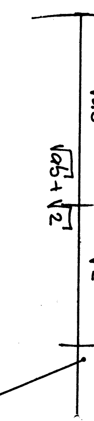
$\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{x_1}$



Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



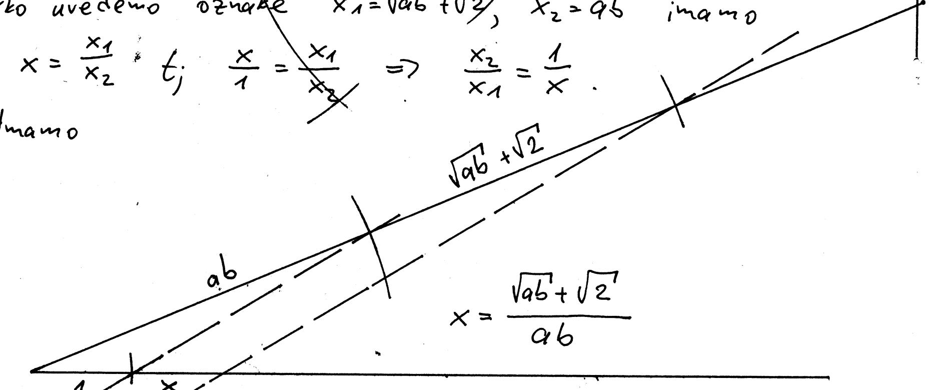
Konstruišimo duž $\sqrt{ab}+\sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1=\sqrt{ab}+\sqrt{2}$, $x_2=ab$ imamo

$x=\dfrac{x_1}{x_2}$ tj. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{1}{x}$.

Imamo

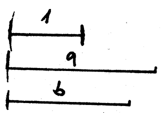


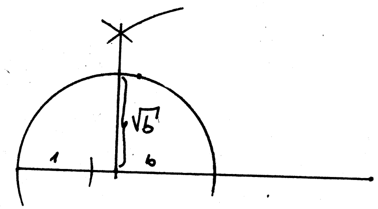
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

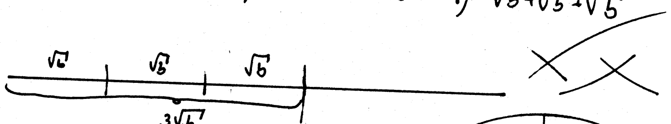
Rj.

Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.

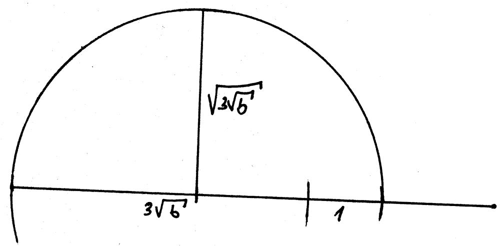




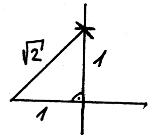
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



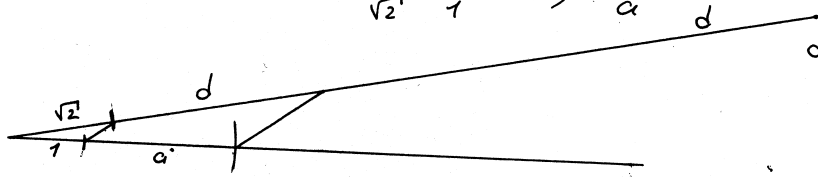
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad /\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

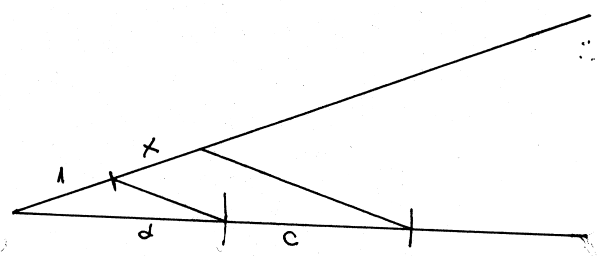
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

gde je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$, $d = a\sqrt{2}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

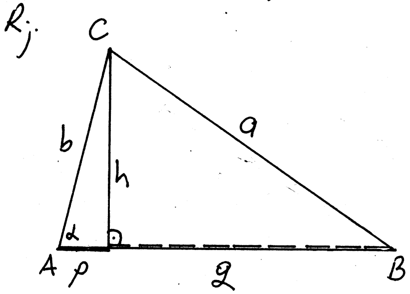
$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$





(#) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

$$a^2 = h^2 + q^2$$

$$+\ h^2 = b^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + q^2 - p^2 \quad \ldots (*)$$

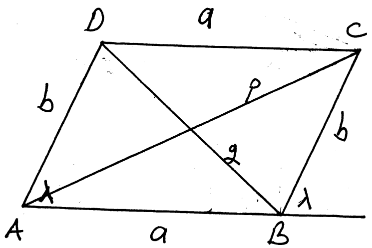
$$\left.\begin{aligned} q^2 - p^2 &= (c-p)^2 - p^2 \\ q^2 - p^2 &= c^2 - 2pc \\ p &= b\cos\alpha \end{aligned}\right\} (**)$$

$$(*) \text{ i } (**) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

q.e.d.

\# Neka je □ABCD paralelogram kod koga su $AB=a$, $BC=b$, $AC=p$ i $BD=q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2+q^2=2a^2+2b^2$.

Rj.



(uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu)

$$p^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ABC \quad (*)$$

$$q^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle BAD \quad (**)$$

$$\angle BAD=180^\circ-\angle ABC$$

$$\cos\angle BAD=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC \quad (***)$$

$$(*)+(**) \overset{(***)}{\Longrightarrow} p^2+q^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ABC+a^2+b^2+2ab\cos\angle ABC$$

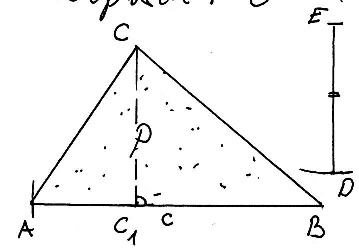
$$p^2+q^2=2a^2+2b^2$$

q.e.d

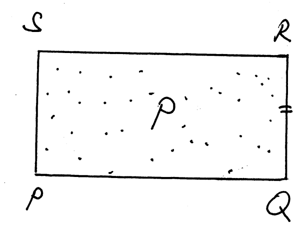
\# Dat je ΔABC i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla ΔABC i čija je jedna strana jednaka dužini duži DE.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, duž DE i neka je $\square PQRS$ četverougao čija je površina jednaka površini ΔABC i $RQ \cong DE$



$$P_{\square PQRS}=|PQ|\cdot|RQ|=|PQ|\cdot|ED|$$

$$P_{\Delta ABC}=c\cdot h_c=|AB|\cdot|CC_1|$$

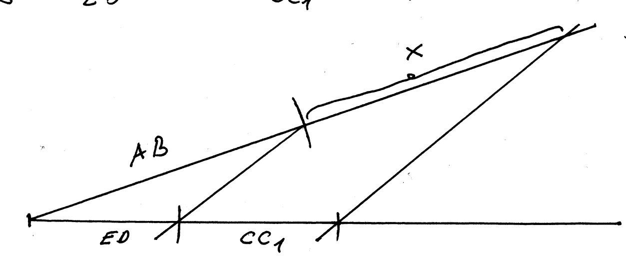
$$|PQ|\cdot|ED|=|AB|\cdot|CC_1|$$

$$|PQ|=\frac{|AB|\cdot|CC_1|}{|ED|}$$

Kako su nam poznate duži AB, CC_1, ED to nije teško konstruisati duž PQ, a time i $\square PQRS$ (pošto su nam poznate duži PQ i QR).

Uputa za konstrukciju duži PQ.

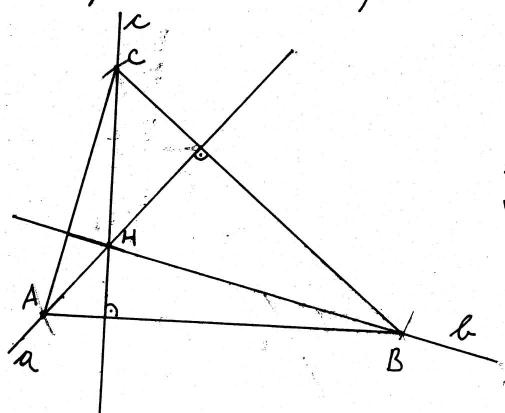
$$\frac{\overbrace{PQ}^{=x}}{AB}=\frac{CC_1}{ED} \Rightarrow \frac{ED}{CC_1}=\frac{AB}{x}$$



Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tri prave a, b i c koje se sijeku u tački H, neka je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, i neka a, b i c sadrže visine trougla ΔABC.

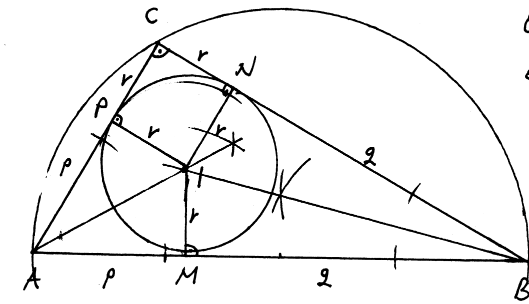
Primetimo da postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu c.

Isto tako, postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku B i okomita je na pravu a.

Kako su nam date prave a, b i c i tačka A to nije teško konstruisati tačke B i C.

Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je $IM = IN = IP = r$.

Dalje, primetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad /:2$$

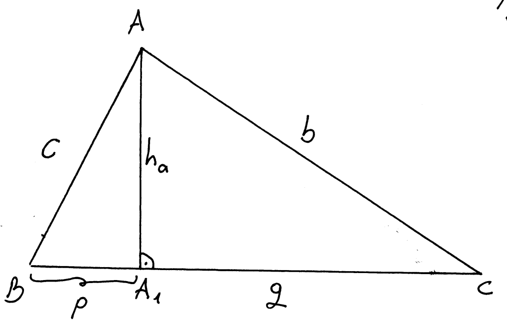
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pq}{2} = pq$$

q.e.d.

Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P=\frac{a\cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj. raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta BA_1A}+P_{\Delta AA_1C}$$

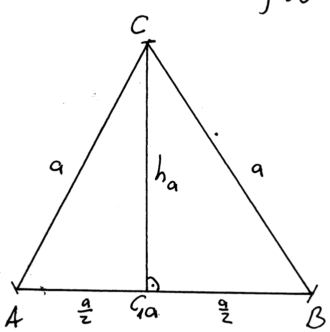
$$P_{\Delta BA_1A}=\frac{p\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta A_1CA}=\frac{q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{q\cdot h_a}{2}=\frac{p\cdot h_a+q\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{(p+q)\,h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$ q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AC_1C}+P_{\Delta BCC_1}$$

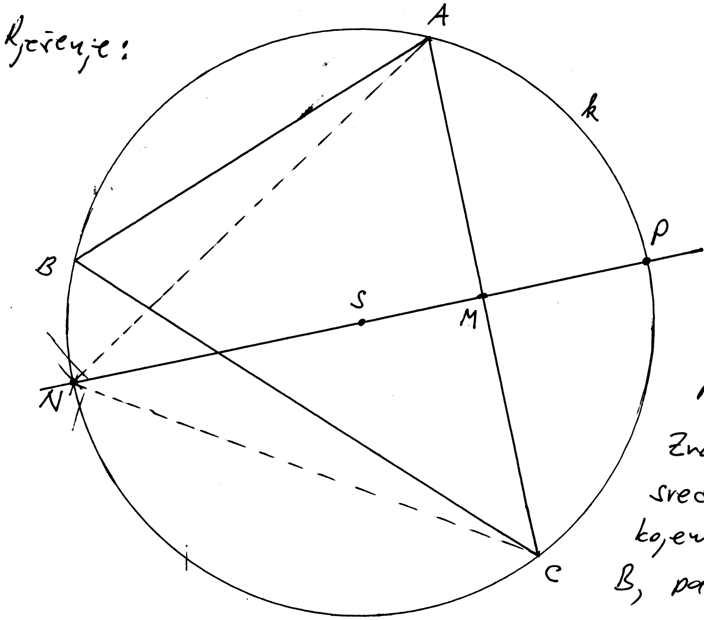
$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta AC_1C}&=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}\\ P_{\Delta BCC_1}&=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}\end{aligned}\right\} P_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$h_a=\frac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC ($AB<AC$), i neka je tačka N središte luka $\overset{\frown}{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P\neq N$ tačku presjeka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\overset{\frown}{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN\cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{aligned} AN&\cong NC\\ NM&\cong NM\\ AM&\cong MC \text{ (M sredina AC)}\end{aligned}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM\cong\Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

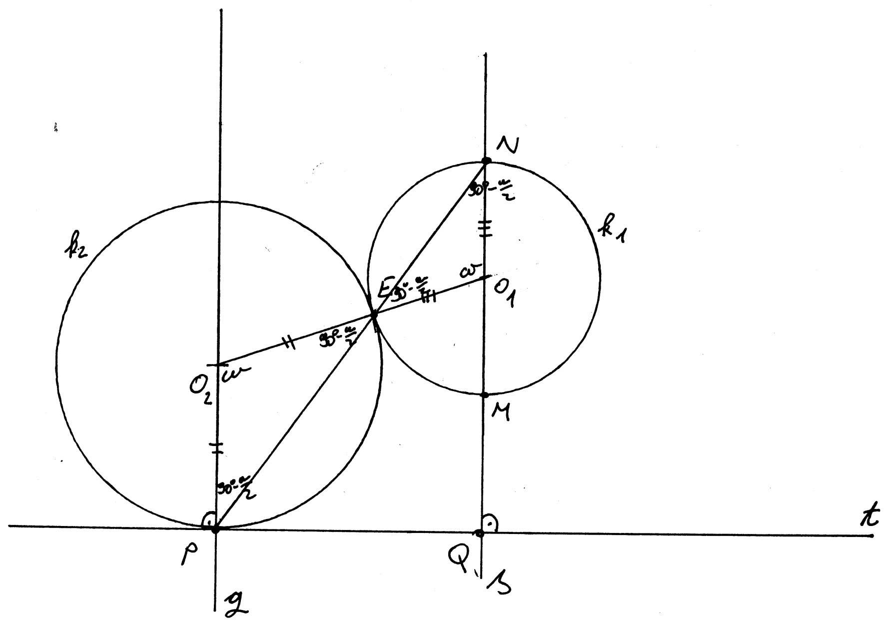
$$\measuredangle AMN\cong\measuredangle CMN=90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Date su prave t, g i s takve da $g \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $g \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in g$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

Rj.



Prvo primjetimo kako je $g \perp t$ i $s \perp t$ to je $g \parallel s$. Dalje krugovi k_1 i k_2 se dodiruju u tački E pa imamo da $E \in p(O_1, O_2)$ i $O_1 - E - O_2$. Kako je $g \parallel s$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala to $\measuredangle PO_2O_1 \cong \measuredangle NO_1O_2 = \omega$.
Posmatrajmo trouglove ΔPO_2E i ΔNO_1E.

ΔPO_2E jkk i $\measuredangle PO_2E = \omega \Rightarrow \measuredangle O_2PE \cong \measuredangle O_2EP = 90° - \frac{\omega}{2}$.

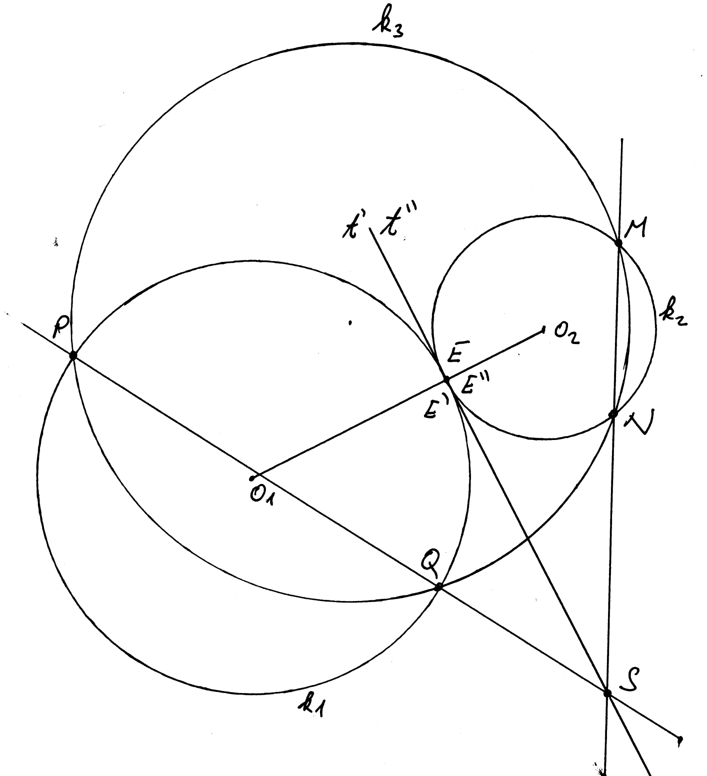
ΔEO_1N jkk i $\measuredangle NO_1E = \omega \Rightarrow \measuredangle NEO_1 = \measuredangle ENO_1 = 90° - \frac{\omega}{2}$

Na pravoj $p(O_1, O_2)$ imamo $E \in O_1O_2$ i $\measuredangle O_2EP \cong \measuredangle O_1EN = 90° - \frac{\omega}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E \in p(P, N)$ tj. $O_1O_2 \cap PN = \{E\}$ q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P, Q)$ i $p(M, N)$ dokazati da je $p(S, E)$ tangenta i na krug k_1 i na krug k_2.

Rj.



Posmatrajmo krug k_3, i prave $p(P, Q)$ i $p(M, N)$. Prema osobini potencije tačke znamo da je $PS \cdot QS = MS \cdot NS$. ...(1)
Iz tačke S možemo povući dvije tangente na krug k_1. Pa neka je t' tangenta na k_1 sa one strane prave $p(S, O_1)$ sa koje je tačka E i neka t' dodiruje k_1 u tački E'. Slično imamo i za k_2, pa neka je t'' tangenta na krug k_2 sa one strane prave $p(S, O_2)$ sa koje je tačka E i neka t'' dodiruje k_2 u tački E''.

Za k_1 $PS \cdot QS = SE'^2$
Za k_2 $MS \cdot NS = SE''^2$
$\Big\} \overset{(1)}{\Rightarrow} SE'^2 \cong SE''^2 \Rightarrow SE' \cong SE''$

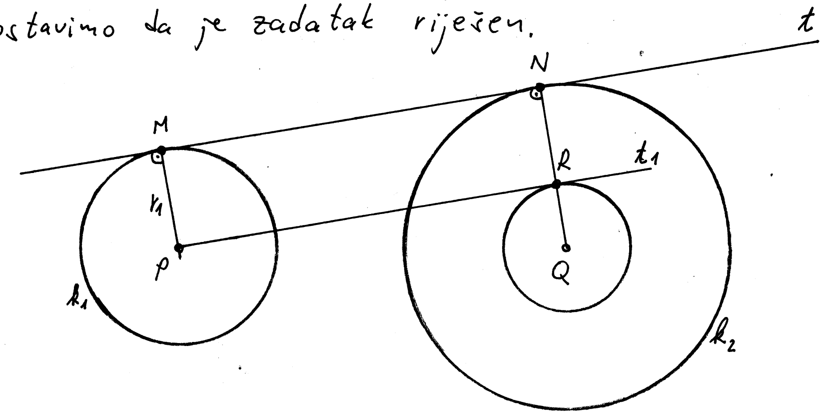
Prave $p(S, E')$ i $p(S, E'')$ ne mogu biti dvije različite prave jer bi tada razdvajali krugove k_1 i k_2 (krugovi ne bi imali zajedničku tačku E) $\Rightarrow p(S, E') \equiv p(S, E'') \Rightarrow \boxed{E' = E'' = E}$

$p(S, E)$ jest tang. na k_1 i na k_2 q.e.d.

\# Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P,r_1)$ i $k_2(Q,r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ ($NQ > PM$).

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

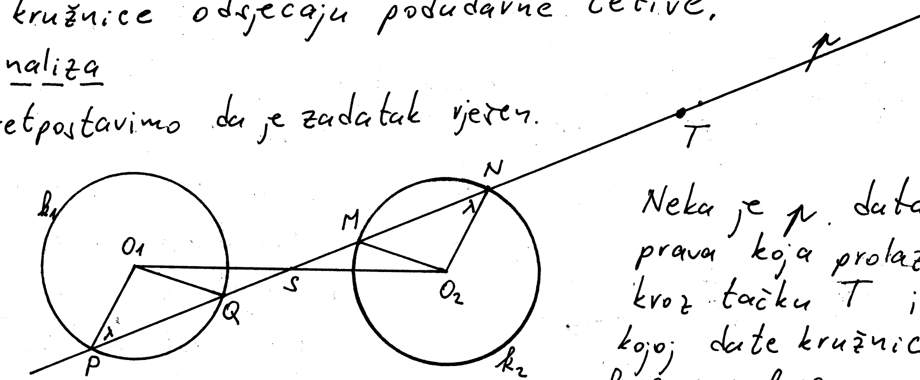
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

\# Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsijecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsijecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\triangle PQO_1 \cong \triangle MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\angle O_1PQ \cong \angle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \angle O_1SP \cong \angle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \angle SPO_1 \cong \angle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle PSO_1 \cong \triangle NSO_2 \Downarrow O_1S \cong O_2S.$$

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

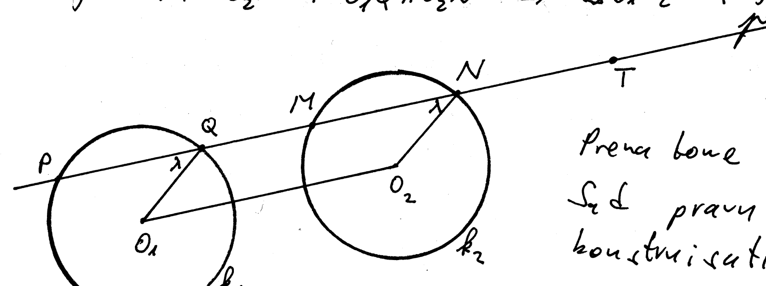
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow \triangle PQO_1 \cong \triangle MNO_2$

$\Downarrow$

$\angle O_1QP \cong \angle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N \Rightarrow \square O_1O_2NQ$ je paralelogram.

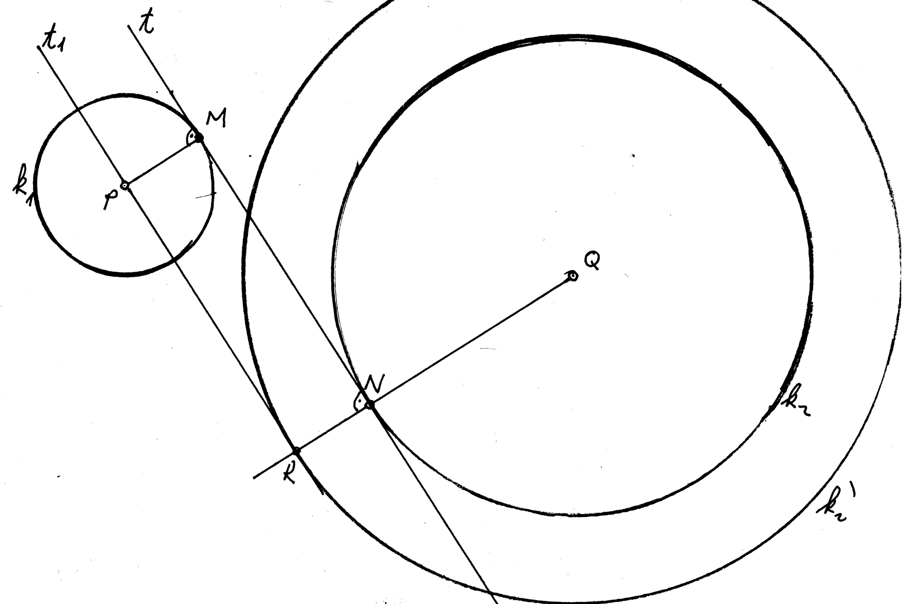


Prema tome $p \parallel O_1O_2$. Sad pravu p možemo konstruisati.

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P,r_1)$ i $k_2(Q,r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

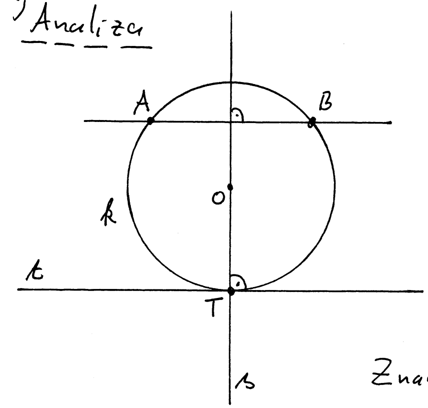
Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P). Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(A,B) \parallel t$ to $s \perp t$.

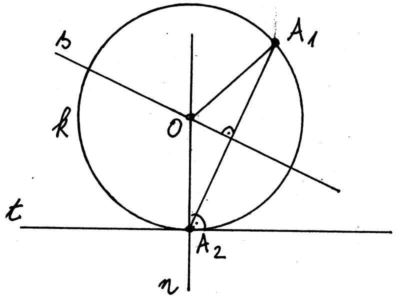
Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.

Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.

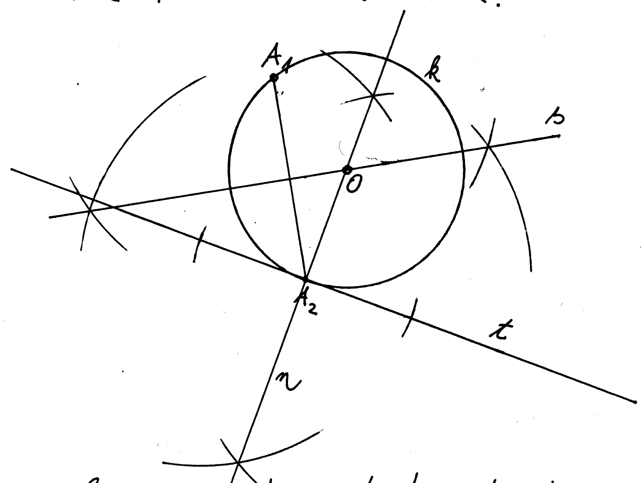


Primjetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primjetimo da je $\triangle OA_2A_1$ jkk. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $O \in s$ gdje je s simetrala stranice A_1A_2.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s, s simetrala A_2A_1
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$



Dokaz

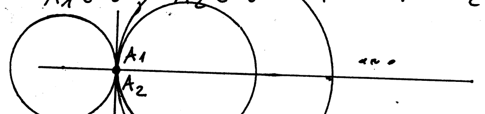
Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Determinacija

Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

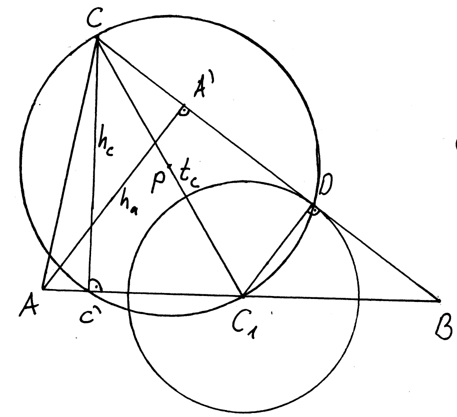
Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja

Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješenja



Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2} AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

Rješenje:



$AA' = h_a$

Prema pretpostavci zadatka $C_1D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} h_a$,

Prema tome prvi krug može biti $k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a)$

Trougao $\triangle CDC_1$ je pravougli pa je centar opisanog kruga tog trougla na sredini težišnice $t_c = CC_1$. Označimo tu tačku sa P.

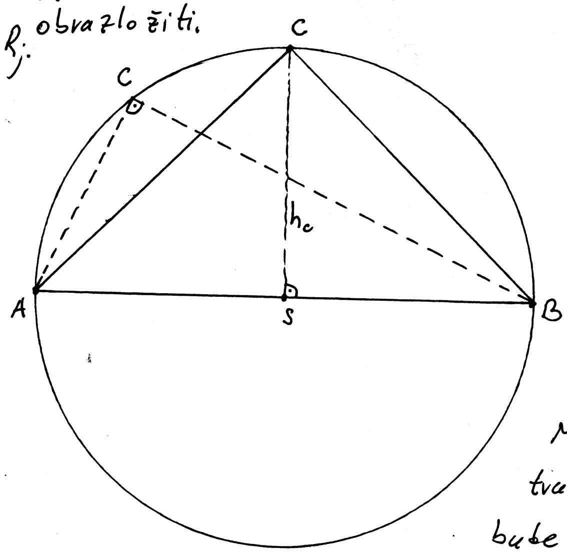
Drugi krug može biti $k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

Na kraju $\{D\} = k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a) \cap k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A,B\in k$, $S\in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P=\dfrac{a\cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC\cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{AB\cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

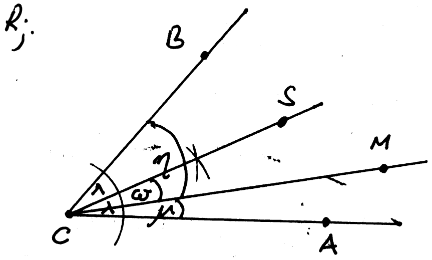
Prema tome problem da proizvod duži $AC\cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS\perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC\cong BC$. Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC\cong BC$.

q.e.d.

(#) Zadani su ugao $\sphericalangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\sphericalangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\sphericalangle ACB$. Dokazati da je $\sphericalangle SCM=\frac{1}{2}(\sphericalangle MCA-\sphericalangle MCB)$.

Rj.



Uvedimo oznake:

$\lambda=\sphericalangle ACS\cong\sphericalangle SCB$

$\omega=\sphericalangle SCM$

$\mu=\sphericalangle MCA$ i $\eta=\sphericalangle MCB$.

Trebamo pokazati da je $\omega=\frac{1}{2}(\mu-\eta)$

$\omega=\lambda-\mu$

$\omega=\eta-\lambda$

tj. $\sphericalangle SCM=\sphericalangle ACS-\sphericalangle MCA$

$\sphericalangle SCM=\sphericalangle MCB-\sphericalangle SCB$ $+$ $(\sphericalangle ACS\cong\sphericalangle SCB)$

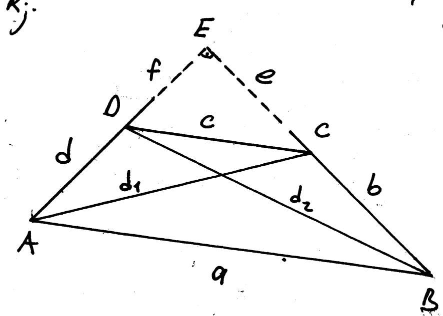
$2\sphericalangle SCM=\sphericalangle MCB-\sphericalangle MCA$

$\sphericalangle SCM=\frac{1}{2}(\sphericalangle MCB-\sphericalangle MCA)$

q.e.d.

(#) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$d_1^2=(d+f)^2+e^2$ ...(1)

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$d_2^2=(b+e)^2+f^2$ ...(2)

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom AB $\Rightarrow a^2=(d+f)^2+(e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom CD $\Rightarrow c^2=e^2+f^2$

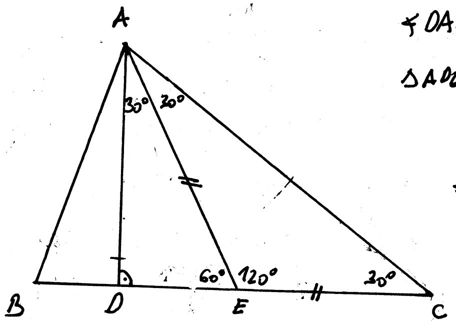
$(1)+(2)\Rightarrow d_1^2+d_2^2=(d+f)^2+e^2+(b+e)^2+f^2=a^2+c^2$

tj. $d_1^2+d_2^2=a^2+c^2$

q.e.d.

\# U trouglu ΔABC je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE $(E \in BC)$ ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Nađi uglove trougla ΔABC i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\measuredangle DAE \cong \measuredangle CAE = 30°$

ΔADE pravougli $\Rightarrow \measuredangle AEC = 120°$
(vanjski ugao ΔADE)

$\Rightarrow \measuredangle ACE = 30° \Rightarrow \Delta AEC$ jkk

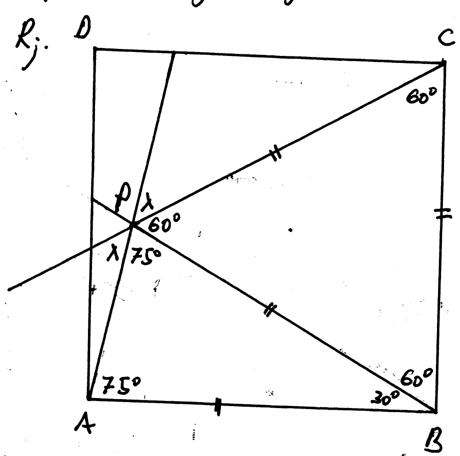
tj. $AE = EC$

ΔABC jkk $\Rightarrow$
$\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA = 75°$

$\alpha = 75°,\ \beta = 75°,\ \gamma = 30°$

\# Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



ΔBCP jkk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\measuredangle ABC = 90° \Rightarrow \measuredangle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \Delta ABP$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

$\lambda = 45°$

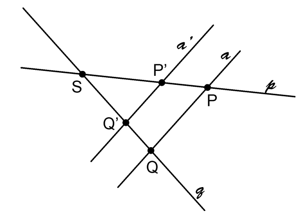
Euklidska geometrija 2

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?

2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).

3. Ugao između tangente i tetive jednak je peri...

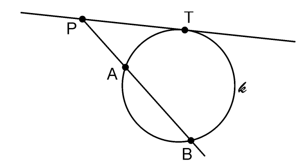
4. Talesova teorema glasi: Neka su... (vidi sliku)... Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square}$.



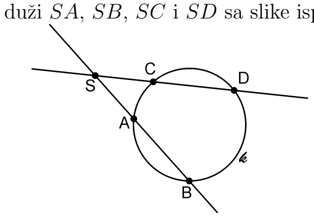
5. Poljedica talesove teoreme: $\frac{SP}{SQ} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{\square}{\square}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{\square}{\square}$.

6. Obrat Talesove teoreme glasi: $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square} \Rightarrow a \| a'$.

7. Neka je prava $p(P,T)$ tangenta na krug k. U kakvom su odnosu duži PT, PA i PB sa slike ispod?



8. Neka su date dvije prave koje se sijeku u tački S i koje sijeku krug k u tačkama A, B, C i D. U kakvom su odnosu duži SA, SB, SC i SD sa slike ispod?



SPISAK AKSIOMA

Euklidska geometrija

I Aksiome incidencije (pripadanja)

I_1 Za svake dve tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

I_6 Ako su dve tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

II Aksiome poretka

II_1 Ako je $(A-B-C)$, tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C-B-A)$.

II_2 Za svake dve tačke A i B postoji tačka C, takva da je $(A-B-C)$.

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A-B-C)$, $(B-C-A)$, $(C-A-B)$.

II_4 (**Pašova aksioma**) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako važi relacija $(A-p-B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B-p-C)$ i $(C-p-A)$.

III Aksiome podudarnosti

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

III_2 Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III_3 Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom p', za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao ab, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao ab podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

III_5 Ako za trouglove ABC i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

IV Aksiome neprekidnosti

IV_1 (**Arhimedova aksioma**) Neka su AB i CD proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom AB, tako da je

$$(A-A_1-A_2), (A_1-A_2-A_3), (A_2A_3A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj n, takav da je (A_1-B-A_n).

IV_2 **(Kantorova aksioma)** **Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.**

V Aksioma paralelnosti

V_E **Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne seče pravu a.**

Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

V_L **(Aksioma Lobačevskog)** **Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoje u ravni aA bar dve prave koje su incidentne sa tačkom A i ne seku pravu a.**

Urađeni zadaci

1. Naći zbir $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtan slobodno).

2. U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

3. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA+MB+MC<AC+BC$.

4. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

5. Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

6. Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

7. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P\in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC+30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB+\measuredangle CSP<90°$.

8. Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N redom, tako da je $CM+CN\cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

9. Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $(P-M-Q)$. Dokazati da je $PQ>AB$.

10. Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

11. Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA=30°$, $\measuredangle MAB=10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$, ako je $\measuredangle ACB=80°$ i $AC\cong BC$.

12. Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

13. U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

14. Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice trougla se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $PQ=\frac{1}{2}BC$ i da je $p(P,Q)||p(B,C)$.

15. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

16. Dijagonala AC konveksnog četverougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB\cong CD$ i $AD\cong BC$.

17. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od tjemena CD su podudarna, a pored toga je $AC+CB\cong AD+DB$. Dokazati da je $AD\cong BC$ i $AC\cong BD$.

18. Dokazati da većoj visini odgovara manja stranica i obrnuto.

19. Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A, C)$ i $p(B, C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

20. U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla $\triangle BCI$ nalazi na presjeku poluprave $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$.

21. Neka je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ data je tačka P takva da je $\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB$. Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka P podudara sa tačkom I.

Zadaci za vježbu

22. Dokazati da je ugao koji obrazuju visina i težišna linija koje odgovaraju hipotenuzi pravouglog trougla jednak razlici oštrih uglova toga trougla.

23. Koje veličine mogu da budu uglovi α, β, γ trougla $\triangle ABC$, ako je $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

24. Data je kružnica $k(O, r)$ i tačka M. C je proizvoljna tačka kružnice $k(O, r)$, a A i B su tačke u kojima prava MO siječe kružnicu $k(O, r)$. Dokazati da je $MA \leq MC \leq MB$ ili $MB \leq MC \leq MA$.

25. Centri upisane i opisane kružnice trougla se poklapaju. Dokazati da je taj trougao jednakostraničan.

26. Dokazati da je ugao trougla:
(a) oštar ako i samo ako je naspremna stranica manja od dvostruke težišne linije koja joj odgovara;
(b) prav ako i samo ako je naspremna stranica podudarna dvostrukoj težišnoj liniji koja joj odgovara;
(c) tup ako i samo ako je naspremna stranica veća od dvostruke težišne linije koja joj odgovara.

27. Koja stranica raznostranog trougla je najbliža:
(a) centru opisane kružnice;
(b) ortocentru;
(c) težištu?
(Odgovore obrazložiti.)

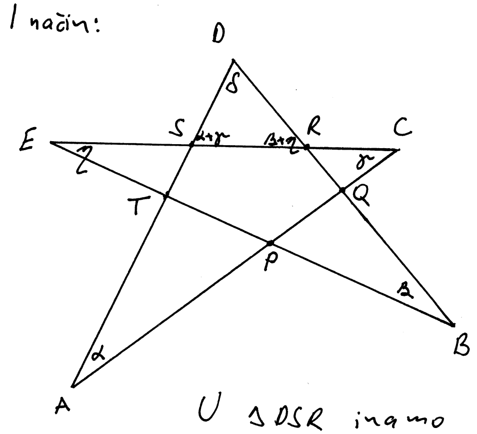
28. Koja tjeme raznostranog trougla je najbliža:
(a) ortocentru;
(b) centru upisane kružnice
(c) težištu?
(Odgovore obrazložiti.)

29. U unutrašnjosti konveksnog četverougla naći tačku za koju je zbir rastojanja do tjemena četverougla minimalan.

30. Naći tačku S za koju je zbir rastojanja do četiri tačke iste ravni minimalan.

Naći zbir $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtana slobodno).

Rj. I način:



$\measuredangle DSR$ je vanjski ugao trougla $\triangle ACS$

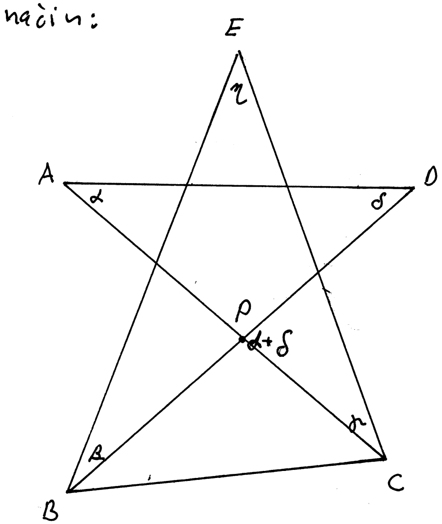
$\Rightarrow \measuredangle DSR = \alpha + \gamma$

$\measuredangle DRS$ je vanjski ugao $\triangle EBR$

$\Rightarrow \measuredangle DRS = \beta + \eta$

U $\triangle DSR$ imamo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta = 180^\circ$

II način:



$\measuredangle DPC$ je vanjski ugao $\triangle APD$

pa je $\measuredangle DPC = \alpha + \delta$.

$\measuredangle DPC$ je ujedno i vanjski ugao $\triangle PBC$

pa je $\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = \alpha + \delta$

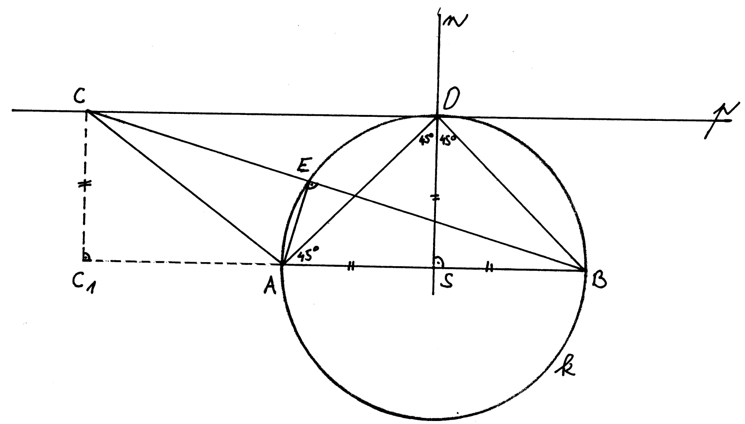
Sad imamo

$\beta + \measuredangle PBC + \measuredangle PCB + \gamma + \eta = 180^\circ$ tj.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta = 180^\circ$.

U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

Rj.



Neka je dat $\triangle ABC$ takav da je $AB = 2CC_1$ gdje je CC_1 visina spuštena iz vrha C. Treba dokazati da $\measuredangle ACB$ nije tup.

Sa S označimo sredinu stranice AB i kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,B)$. Neka je $n \perp p(A,B)$ i $S \in n$.

$\{D\} = p \cap n$

Kako je $p(C_1,S) \parallel p(C,D)$ i $p(C,C_1) \parallel p(D,S) \Rightarrow \square C_1SDC$ paralelogram
$\Rightarrow CC_1 \cong DS$

Primjetimo, kako je S sredina stranice AB, da $AS \cong BS \cong CC_1 \cong DS$.
Neka je k kružnica sa centrom u S poluprečnika AS.
Tad, kružnica k je opisana oko $\triangle ABD$, i ima tangentu p u tački D.
Moguća su dva slučaja:

1° $D \equiv C$

Tad $\measuredangle ACB = 90° \Rightarrow \measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

2° $D \not\equiv C$ kako je $C \in p$,
Tad, tačka C pripada vanjskom dijelu kružnice $k(S, AS)$.
Pretpostavimo da je $C \in pr[n, A)$. $\{E\} = BC \cap k$.
Ugao $\measuredangle AEB$ je nad prečnikom $\Rightarrow \measuredangle AEB = 90°$ vanjski ugao $\triangle ACE \Rightarrow \measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

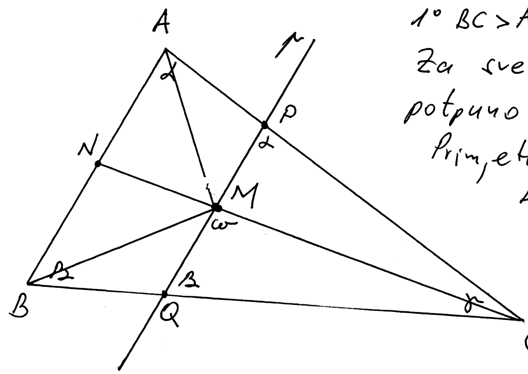
Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla} \end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u $\triangle ABC$ najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja

1° $BC > AC$ 2° $BC \cong AC$ i 3° $BC < AC$



Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$.
Primjetimo sad da imamo
$AB < AC < BC \Rightarrow \gamma < \beta < \alpha$.
Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.
$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$
$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$ je vanjski ugao $\triangle CPM$ pa je $\omega > \alpha$.
Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \overset{\triangle QCM}{\Longrightarrow} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ+MQ \\ AM < AP+MP \end{array}\right\} + \Rightarrow MB+MA < BQ+AP+\underbrace{PM+MQ}_{=PQ}$

$MA+MB < BQ+AP+PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ+AP+PC$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA+MB < BQ+AP+PC \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.

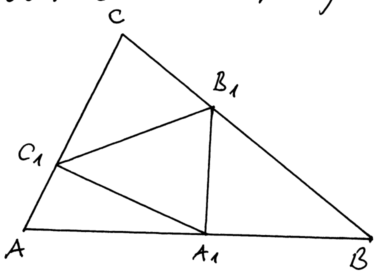
Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ A_1, B_1, C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC\end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

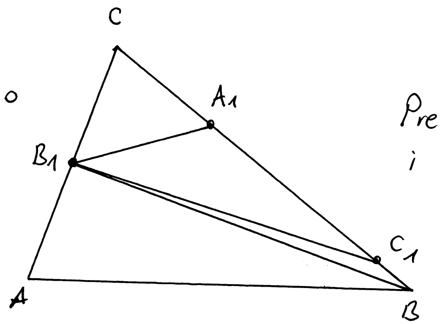
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} A_1B_1 < & A_1B + BB_1\\ B_1C_1 < & CC_1 + CB_1\\ + \; A_1C_1 < & AA_1 + AC_1\\ \hline O_{\Delta A_1B_1C_1} < & O_{\Delta ABC}\end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

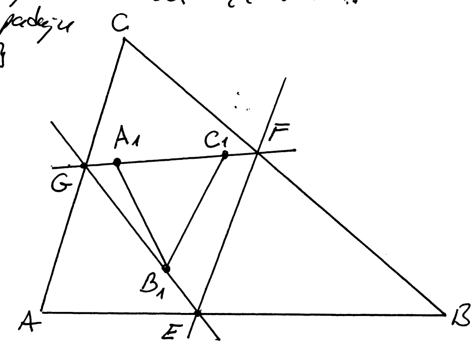
$$\begin{array}{rl} A_1B = & A_1B\\ A_1B_1 < & B_1C + CA_1\\ + \; B_1B < & AB_1 + AB\\ \hline O_{\Delta A_1B_1B} < & O_{\Delta ABC} \quad \dots(1)\end{array} \qquad \begin{array}{rl} B_1C_1 < & B_1B + BC_1\\ B_1A_1 = & B_1A_1\\ + \; A_1C_1 = & A_1C_1\\ \hline O_{\Delta A_1B_1C_1} < & O_{\Delta B_1BA_1} \quad \dots(2)\end{array}$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

Na osnovu ova dva slučaja riješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1,C_1) \cap BC = \{F\}$
$p(A_1,C_1) \cap AC = \{G\}$
$p(G,B_1) \cap AB = \{E\}$

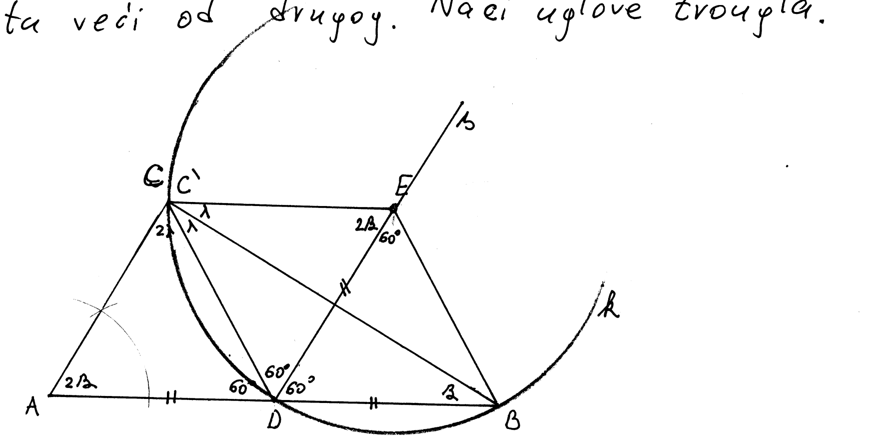


$$\left.\begin{array}{l} 1° \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}\\ 2° \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}$ q.e.d.

Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

Rj.



Neka je D sredina stranice AB, ΔABC. Prema postavi zadatka imamo $\measuredangle CAB = 2\beta$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACD = 2\lambda$, $\measuredangle BCD = \lambda$.

$3\beta + 3\lambda = 180° \Rightarrow \beta + \lambda = 60°$

$\measuredangle ADC$ je vanjski ugao $\Delta CDB \Rightarrow \measuredangle ADC = 60° \Rightarrow \measuredangle CDB = 120°$.

Na simetrali s ugla $\measuredangle CDB$ uzmimo tačku E takvu da je $DE \cong AD$. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong DE\\ \measuredangle ADC \cong \measuredangle EDC = 60°\\ CD \cong CD\end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ADC \cong \Delta EDC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAD \cong \measuredangle DEC = 2\beta, \text{ i } \measuredangle ACD \cong \measuredangle ECD$$

Primjetimo da je ΔDBE jkk sa uglom pri vrhu od $60° \Rightarrow \measuredangle DEB \cong \measuredangle DBE = 60° \Rightarrow \Delta DEB$ jks.

Opišimo kružnicu k sa centrom u E poluprečnika ED. Neka je $k \cap p(B,C) = C'$. Kako je $\measuredangle DBC'$ oštri periferijski ugao njemu odgovara dvostruki centralni ugao $\measuredangle DEC' = 2\beta$. Ovo je moguće jedino u slučaju $C \equiv C'$ pa $D, B, C \in k$. $\Rightarrow$

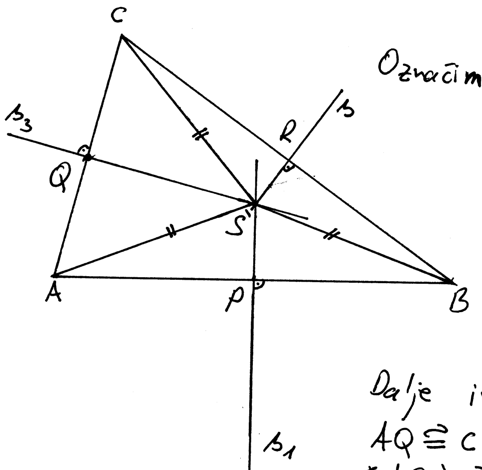
$DE \cong CE \Rightarrow \Delta CDE$ jkk sa osnovicom $CD \Rightarrow 2\lambda = 60° \Rightarrow \lambda = 30°$

$\Rightarrow \beta = 30°$ pa $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 90°$.

(#) Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \text{ simetrala stranice } AB \\ s_2 \text{ simetrala stranice } BC \\ s_3 \text{ simetrala stranice } AC \end{array}\right\} \Rightarrow s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$



Neka je $s_1 \cap s_3 = \{S'\}$

Označimo sa $\{P\} = AB \cap s_1$ i

sa $\{Q\} = AC \cap s_3$.

Posmatrajmo $\triangle APS'$ i $\triangle BPS'$

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong BP \\ \sphericalangle APS' \cong \sphericalangle BPS' = 90^\circ \\ PS' \cong PS' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle APS' \cong \triangle BPS' \Downarrow AS' \cong BS'$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong CQ \\ \sphericalangle AQS' \cong \sphericalangle CQS' = 90^\circ \\ QS' \cong QS' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle AQS' \cong \triangle CQS' \Downarrow AS' \cong CS'$$

Označimo sa s pravu koja prolazi kroz tačku S' i okomita je na pravu $p(B,C)$. Označimo sa $\{R\} = BC \cap s$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} CS' \cong BS' \\ S'R \cong S'R \\ \sphericalangle CRS' \cong \sphericalangle BRS' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CRS' \cong \triangle BRS' \Downarrow CR \cong BR \Rightarrow$$

$\Rightarrow s$ je simetrala stranice BC, pa prema našim oznakama imamo da je $s \equiv s_2$ i $S' \equiv S$ tj.

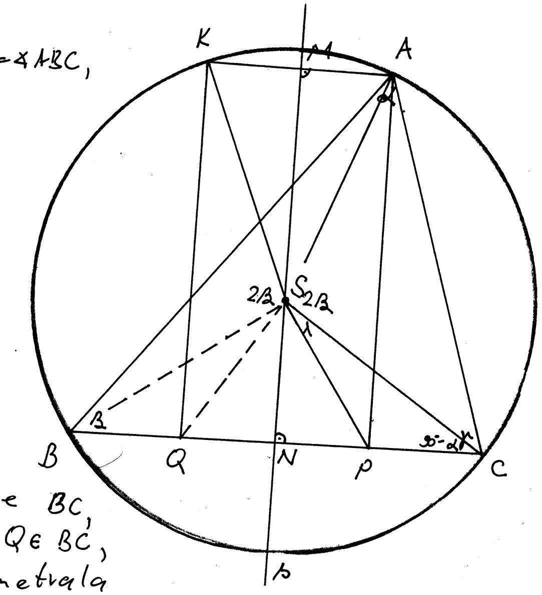
$$s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$

q.e.d.

(#) Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC + 30^\circ$. Dokazati da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$.

Rj. Označimo sa $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ i $\lambda = \sphericalangle CSP$.

Treba dokazati da je $\alpha + \lambda < 90^\circ$.



Primjetimo da je $\sphericalangle CSB = 2\alpha$ pa kako je $\triangle BCS$ jkk $(BS = CS = R)$

$\Rightarrow \sphericalangle PCS = 90^\circ - \alpha$.

Dokažimo da je $PS > PC$.

Neka je s simetrala stranice BC, i tačke K i Q takve da $Q \in BC$, $AK \perp s$, $PQ \perp s$ i s je simetrala duži KA i PQ. Neka je $s \cap KA = \{M\}$ i $s \cap PQ = \{N\}$.

s simetrala $BC \Rightarrow S \in s$.

Iz podudarnosti SUS vidimo da je $\sphericalangle KSM \cong \sphericalangle ASM$, $\sphericalangle QSN \cong \sphericalangle PSN$ i $\sphericalangle BSN = \sphericalangle CSN \Rightarrow \sphericalangle BSK = \sphericalangle ASC = 2\beta$.

$\sphericalangle KSA = \sphericalangle BSA - \sphericalangle BSK = \sphericalangle BSA - \sphericalangle ASC = 2\gamma - 2\beta$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30^\circ \Rightarrow 2\gamma - 2\beta \geq 60^\circ$

tj. $\sphericalangle KSA \geq 60^\circ$, $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle KSA = 60^\circ \Rightarrow AK = R \\ \sphericalangle KSA > 60^\circ \Rightarrow AK > R \end{array}\right\} \Rightarrow AK \geq R$ tj. $QP \geq R$

$SP + R = SQ + SC > QC = QP + PC \geq PC + R \Rightarrow SP > PC$.

U $\triangle PCS$ $\sphericalangle PCS > \sphericalangle CSP \Rightarrow 90^\circ - \alpha > \lambda$

tj. $\alpha + \lambda < 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$

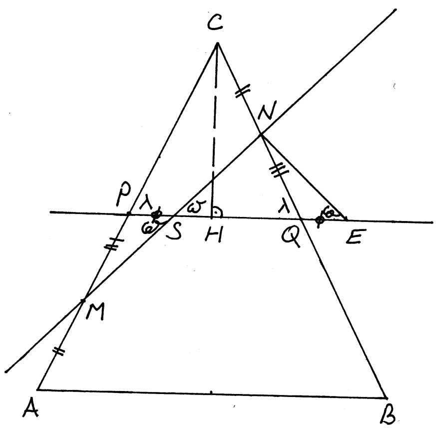
q.e.d.

Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla ΔABC date su tačke M i N redom, tako da je $CM+CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

Rj. postavka zadatka

ΔABC jkk sa osnovicom u AB
$M \in AC$, $N \in BC$ takve $CM+CN \cong AC$
(M i N nisu sredine stranica)
P sredina AC, Q sredina BC
$MN \cap PQ = \{S\}$

$\Rightarrow$ S sredina duži MN



Ako sa H označim ortogonalnu projekciju iz tačke C na osnovu pravila SSU (ugao od $90°$) možemo zaključiti da je $\measuredangle CPH \cong \measuredangle CQH = \lambda$.

Kako je $CM+CN \cong AC \cong BC \Rightarrow$
$\Rightarrow AM \cong CN$

P i Q su sredine bočnih strana
$\Rightarrow AP \cong PC \cong QC \cong BQ$ pa imamo $PM \cong QN$.

Uzmimo tačku $E \in pp[P,Q)$ takvu $P-Q-E$ i $QE \cong PS$.

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QN \\ \measuredangle SPM \cong \measuredangle NQE \\ \quad (=180°-\lambda) \\ PS \cong QE \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta PMS \cong \Delta QNE$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle NEQ \cong \measuredangle MSP = \omega \text{ i } MS \cong NE$$

Kako su uglovi $\measuredangle MSP$ i $\measuredangle NSQ$ unakrsni $\Rightarrow \measuredangle PSM \cong \measuredangle NSE = \omega$

$\Rightarrow \Delta SEN$ je jkk sa osnovicom u SE tj.
$SN \cong NE \Rightarrow SN \cong SM \Rightarrow S$ sredina duži MN

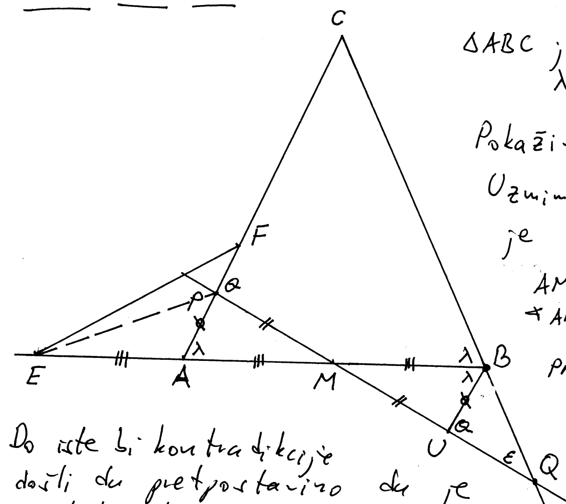
q.e.d.

Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla ΔABC prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $P-M-Q$. Dokazati da je $PQ > AB$.

Rj. postavka zadatka:

ΔABC jkk sa osnovicom u AB
M sredina AB
$P \in p(A,C)$, $Q \in p(B,C)$ t.d. $P-M-Q$

$\Rightarrow PQ > AB$



ΔABC jkk, $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \lambda$
λ je oštar ugao

Pokažimo prvo da je $BQ > AP$.

Uzmimo tačku $U \in pp[M,Q)$ takvu da je $MP \cong MU$. Sad imamo:
$$\left.\begin{array}{l} AM \cong BM \\ \measuredangle AMP \cong \measuredangle BMU \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ PM \cong UM \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta AMP \cong \Delta BMU$$
$$\Downarrow$$
$$AP \cong BU \text{ i } \measuredangle MBU \cong \measuredangle MAP$$

Sad možemo zaključiti da je poredak $M-U-Q$ (Zašto? Ako bi bilo $U \equiv Q$ imali bi da je $\measuredangle MBQ = \lambda$ # kontradikciji (λ je oštar ugao))

Do iste bi kontradikcije došli da pretpostavimo da je poredak $M-Q-U$.

Primjetimo da je $p(A,P) \parallel p(U,B)$
$\Rightarrow \measuredangle QPC \cong \measuredangle QUB = \theta$.

Ugao $\measuredangle QPC$ je vanjski ugao $\Delta AMQ \Rightarrow \lambda < \theta$
Označimo sa $\varepsilon = \measuredangle UQB$. Ugao $\measuredangle ABC$ je vanjski ugao $\Delta MQB \Rightarrow \varepsilon < \lambda$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \theta > \varepsilon \Rightarrow BQ > BU$ tj. $AP < BQ$.

Uzmimo tačku E takvu da $B-A-E$ i $AE \cong AM$.
Uzmimo tačku F takvu da $A-F-C$ i $AF \cong BQ$. Kako je $AP < BQ$ to je poredak $A-P-F$. Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} AE \cong MB \\ \measuredangle EAF \cong \measuredangle MBQ \\ \quad (=180°-\lambda) \\ AF \cong BQ \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta EAF \cong \Delta MBQ$$
$$\Downarrow$$
$$EF \cong MQ.$$

Primjetimo da je $EF > EP$ (Zašto?) i da je u ΔEPM $EP+PM > EM$.

Sad imamo $PQ = PM+MQ = EF+PM > EP+PM > EM = EA+AM = AM+MB = AB$

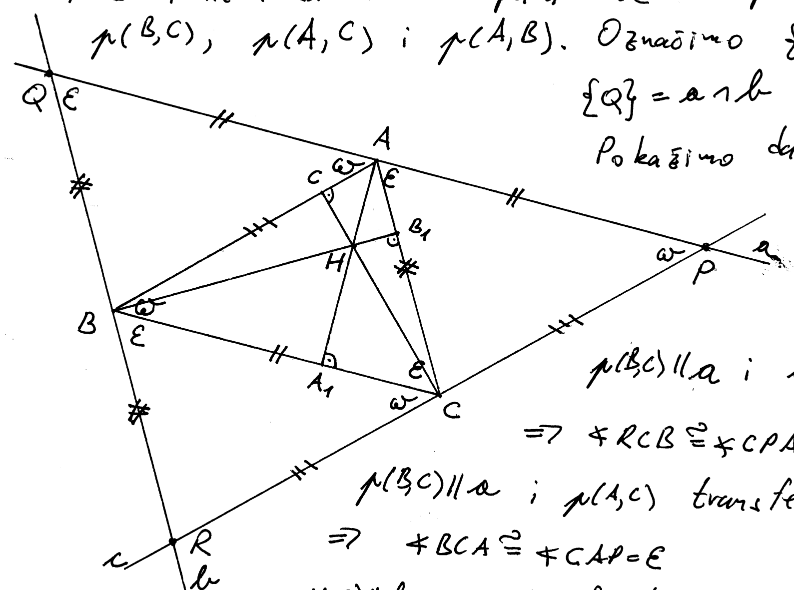
tj. $PQ > AB$ q.e.d.

Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AA_1,\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine trougla}\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$$

Neka prave a, b i c redom prolaze kroz tačke A, B i C i neka su redom paralelne sa pravama $p(B,C)$, $p(A,C)$ i $p(A,B)$. Označimo $\{P\} = a \cap c$, $\{Q\} = a \cap b$ i $\{R\} = c \cap b$.



Pokažimo da su trouglovi ΔRCB, ΔAPC i ΔQAB podudarni.

$p(B,C) \parallel a$ i c transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CPA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,C) \parallel b$ i a transferzala $\Rightarrow \measuredangle BQA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,B) \parallel c$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CBA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle BAQ = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQB \cong \measuredangle CBR = \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ABC \cong \measuredangle APC = \omega \\ \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon \\ AC \cong AC\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ABC \cong \Delta CPA \Downarrow BC \cong AP$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle BCA \cong \measuredangle BQA = \varepsilon \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAQ = \omega \\ AB \cong AB\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ABC \cong \Delta ABQ \Downarrow BC \cong AQ$$

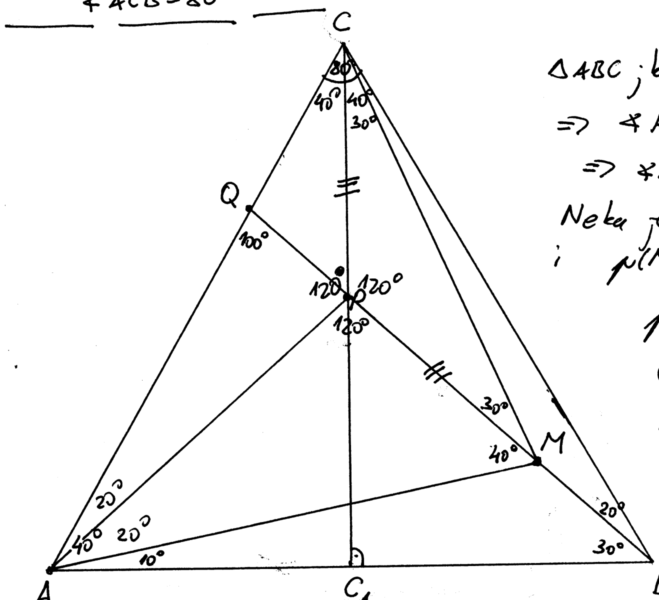
Možemo primjetiti da su ΔBRC, ΔACP i ΔQBA podudarni (zbog pravila USU)

U trouglu ΔPQR prave $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ su simetrale stranica pa prema ranije urađenom zadatku one se sijeku u jednoj tački H. Prema tome $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$ q.e.d.

Unutar ΔABC uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA = 30°$, $\measuredangle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$ ako je $\measuredangle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom } AB \\ M \text{ tačka unutar } \Delta ABC \text{ takva } \measuredangle MBA = 30° \text{ i } \measuredangle MAB = 10° \\ \measuredangle ACB = 80°\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle AMC = ?$$



ΔABC jkk i $\measuredangle ACB = 80° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC = 50° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle MAC = 40°$ i $\measuredangle MBC = 20°$

Neka je CC_1 visina ΔABC i $p(M,B) \cap CC_1 = \{P\}$ i $p(M,B) \cap AC = \{Q\}$.

U ΔABQ znamo dva ugla $\Rightarrow \measuredangle AQB = 100°$
$\Rightarrow AMQ = 40°$.

$$\left.\begin{array}{l}AC_1 \cong BC_1 \\ \measuredangle AC_1P \cong \measuredangle BC_1P = 90° \\ PC_1 \cong PC_1\end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta AC_1P \cong \Delta BC_1P$$

$\Downarrow$

$\measuredangle C_1AP \cong \measuredangle C_1BP = 30° \Rightarrow \measuredangle PAM = 20°$

$\measuredangle APM = 120°$ $\Uparrow$

U ΔAPC znamo da su $\measuredangle CAP = 20°$ i $\measuredangle ACC_1 = 40° \Rightarrow \measuredangle APC = 120°$ $\Rightarrow \measuredangle MPC = 120°$. Posmatrajmo ΔAMP i ΔACP.

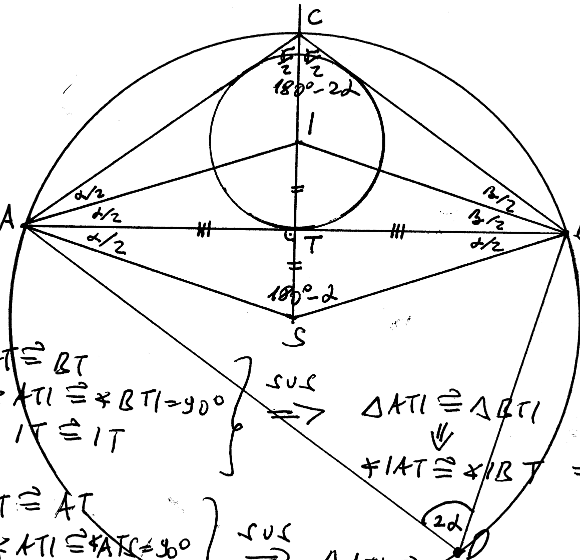
$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle MAP \cong \measuredangle CAP = 20° \\ AP \cong AP \\ \measuredangle MPA \cong \measuredangle CPA = 120°\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta AMP \cong \Delta ACP \Downarrow PC \cong MP \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta PMC$ je jkk sa osnovicom MC i $\measuredangle MPC = 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle PMC \cong \measuredangle PCM = 30° \Rightarrow \measuredangle AMC = 70°$
što je i trebalo pronaći

Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

Rj: postavka zadatka

ΔABC, I centar upisane kružnice, S centar opisane kružnice, tačka S simetrična tački I u odnosu na stranicu AB $\Bigg\} \Rightarrow$ $\sphericalangle ABC = ?$, $\sphericalangle ACB = ?$, $\sphericalangle CAB = ?$



Neka je $\{T\} = SI \cap AB$. Tačka I pripada presjeku simetrala uglova, koje ćemo označiti sa α, β i γ. Tačka S pripada presjeku simetrala stranica ΔABC pa je $p(I,S)$ simetrala stranice AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow AT \cong BT$

$$\left.\begin{array}{l} AT \cong BT \\ \sphericalangle ATI \cong \sphericalangle BTI = 90^\circ \\ IT \cong IT \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta ATI \cong \Delta BTI \Downarrow \sphericalangle IAT \cong \sphericalangle IBT \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\left.\begin{array}{l} AT \cong AT \\ \sphericalangle ATI \cong \sphericalangle ATS = 90^\circ \\ IT \cong TS \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta ATI \cong \Delta ATS \Downarrow \sphericalangle IAT \cong \sphericalangle SAT = \alpha/2$$

I način:

Primjetimo da je ΔASC jkk ($AS = SC = R$) pa $3 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$ tj. $\gamma = 3\alpha$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ tj. $5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \beta = 36^\circ$, $\gamma = 108^\circ$ što je i trebalo naći.

II način:

U ΔABC, $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2\alpha$

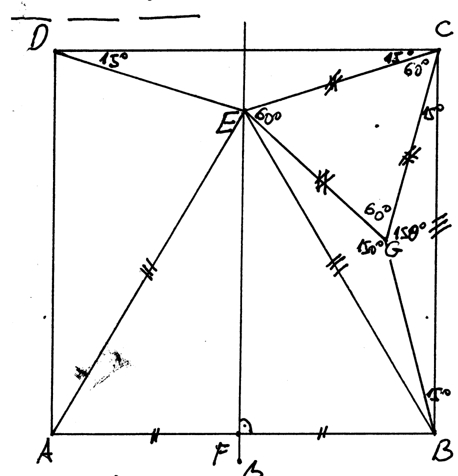
$\sphericalangle ACB$ je tupi periferijski ugao nad tetivom AB. Neka je D proizvoljna tačka na kružnici takva da je $\sphericalangle ADB$ oštri periferijski ugao $\Rightarrow \sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle ADB = 2\alpha$. Kako je $\Delta AST \cong \Delta BST$ (prema pravilu sus) to je $\sphericalangle SBT = \alpha/2 \Rightarrow \sphericalangle ASB = 180^\circ - \alpha$.

ZAVRŠITE SAMI (Uputa: Kakva je veza između $\sphericalangle ASB$ i $\sphericalangle ADB$?)

U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je ΔCDE jednakokraki sa uglovima kod C i D od 15°. Dokazati da je ΔABE jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$\square ABCD$ kvadrat, E tačka u unutrašnjosti kvadrata, ΔCDE jkk sa uglovima $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle EDC = 15^\circ$ $\Bigg\} \Rightarrow \Delta ABE$ jednakostraničan



Kako je ΔCDE jkk to E leži na simetrali (s) duži CD a time i duži AB. Imamo $\{F\} = s \cap AB$

$$\left.\begin{array}{l} AF \cong BF \\ \sphericalangle AFE \cong \sphericalangle BFE = 90^\circ \\ EF \cong EF \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta AFE \cong \Delta BFE \Downarrow AE \cong BE$$

Uzmimo tačku G u unutrašnjosti ΔBCE takvu da je $\sphericalangle GBC \cong \sphericalangle GCB = 15^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle EDC \cong \sphericalangle GBC = 15^\circ \\ DC \cong BC \\ \sphericalangle ECD \cong \sphericalangle GCB = 15^\circ \end{array}\right\} \overset{usu}{\Longrightarrow} \Delta DEC \cong \Delta BCG \Downarrow CE \cong GC,$$

a kako je još $\sphericalangle ECG = 60^\circ$ to je ΔECG jks (ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je 60°)

Primjetimo da su $\sphericalangle DEC \cong \sphericalangle CGB = 150^\circ$ pa je i $\sphericalangle BGE = 150^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} EG \cong CG \\ \sphericalangle EGB \cong \sphericalangle CGB = 150^\circ \\ GB \cong GB \end{array}\right\} \overset{sus}{\Longrightarrow} \Delta EGB \cong \Delta CGB \Downarrow EB \cong BC$$

Kako je $BC \cong AB$ ($\square ABCD$ kvadrat) to je $AE \cong BE \cong AB$

tj. ΔABE jednakostranični

q.e.d.

(#) Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice u trouglu se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla ΔABC, Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2} BC$ i da je $p(P,Q) \parallel p(B,C)$.

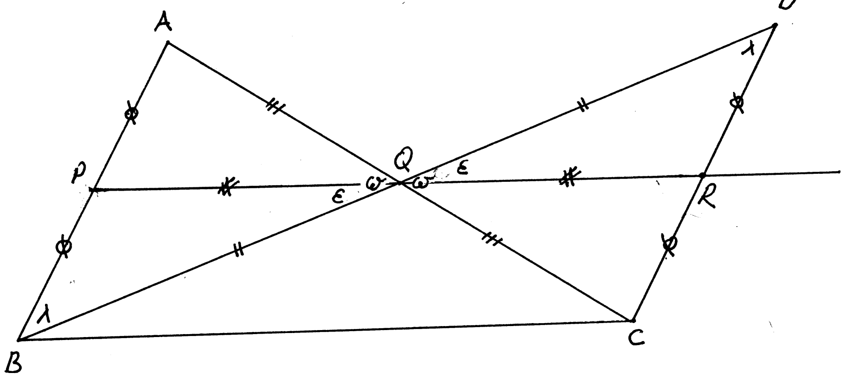
Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ P \text{ sredina } AB \\ Q \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Rightarrow PQ = \tfrac{1}{2} BC \text{ i } p(B,C) \parallel p(P,Q)$$

Na pravoj $p(B,Q)$ uzmimo tačku D tako da je $B-Q-D$ i $BQ \cong QD$. Primjetimo

$$\left.\begin{array}{l} BQ \cong QD \\ \measuredangle BQA \cong \measuredangle DQC = \omega \\ AQ \cong CQ \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AQB \cong \Delta CQD \Downarrow \measuredangle ABQ \cong \measuredangle CDQ = \lambda \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(B,A) \parallel p(C,D)$. Označimo sa $\{R\} = p(P,Q) \cap CD$. i $AB \cong CD$



$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PBQ \cong \measuredangle QDR = \lambda \\ BQ \cong DQ \\ \measuredangle PQB \cong \measuredangle DQR = \varepsilon \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta PQB \cong \Delta RQD \nearrow PQ \cong QR$$

$\Downarrow$

$PB \cong DR$ a kako je $AB \cong CD$

to je i $CR \cong DR$. (P je sredina AB).

U četverouglu $\square BCRP$ imamo $PB \cong CR$ i $p(P,B) \parallel p(C,R) \Rightarrow$

$\Rightarrow \square BCRP$ paralelogram $\Rightarrow p(P,Q) \parallel p(B,C)$ q.e.d

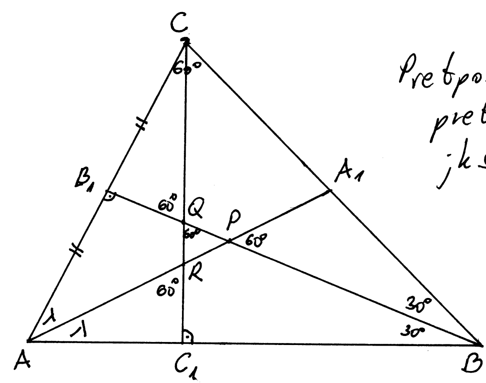
a kako je $PR \cong BC$ i $PQ \cong QR \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} BC$ q.e.d.

(#) Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ CC_1 \text{ visina trougla} \\ AA_1 \text{ simetrala } \measuredangle BAC \\ BB_1 \text{ težišna duž} \\ AA_1 \cap CC_1 = \{R\},\ AA_1 \cap BB_1 = \{P\} \\ BB_1 \cap CC_1 = \{Q\} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PQR \text{ nije jednakostraničan}$$

ΔABC je raznostraničan trougao.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je ΔPQR jks, tj. $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle PQR \cong \measuredangle QRP = 60°$.

$\Delta AC_1R \Rightarrow \lambda = 30°$

pa je $\measuredangle BAC = 60°$

$\Delta C_1BQ \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 30°$

ΔABB_1 ($\measuredangle B_1AB = 60°$, $\measuredangle ABB_1 = 30°$) $\Rightarrow \measuredangle BB_1A = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong CB_1 \\ \measuredangle BB_1A \cong \measuredangle BB_1C = 90° \\ BB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta BB_1A \cong \Delta BB_1C$$

$\Downarrow$

$\measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle B_1BC = 30°$

i $\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B_1CB = 60°$

ΔABC je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

#kontradikcija

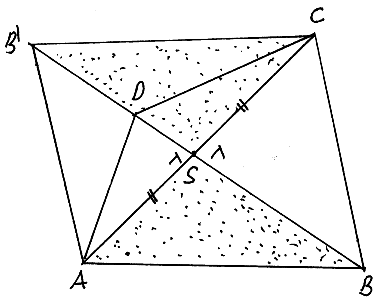
(sa pretpostavkom da je ΔABC raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji ΔPQR)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome ΔPQR ne može biti jks q.e.d

Dijagonala AC konveksnog četvorougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan četvorougao} \\ AB+BC \cong AD+CD = \frac{O}{2} \\ AC \cap BD = \{S\},\ S \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Longrightarrow AB \cong CD \text{ i } AD \cong BC$$



Na polupravoj $pp[S,D)$ uzmimo tačku B' tako da je $SB' \cong SB$. Moguća su tri slučaja:

1° $S-D-B'$

2° $S-B'-D$

3° $D \equiv B'$

Bez obzira koji od ovih slučajeva da se desi, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB' \cong CSB = \lambda \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ASB' \cong \Delta CSB \Downarrow AB' \cong BC$$

Isto tako
$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB \cong \measuredangle CSB' \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ASB \cong \Delta CSB' \Downarrow CB' \cong AB$$

Kako je $AB+BC \cong AD+CD$ to je i $AB'+CB' \cong AD+DC$ ...(*)

Sad, ako bi bilo $S-D-B'$ imali bi $AD+DC < AB'+CB'$ # kontradikcija (sa *)

Ako bi bilo $S-B'-D$ imali bi $AB'+B'C < AD+DC$ # kontradikcija (sa *)

Prema tome $B' \equiv D \Rightarrow AD \cong AB'$ i $CD \cong CB'$

pa je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$

q.e.d.

U konveksnom četvorouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od prave $p(C,D)$ su podudarna, a pored toga je $AC+CB \cong AD+DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

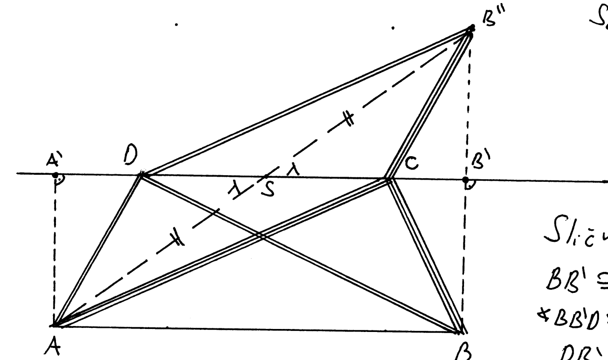
Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan, } A' \text{ ortog. proj. tač } A \text{ na } p(C,D) \\ B' \text{ ortog. proj. tač } B \text{ na } p(C,D),\ AA' \cong BB' \\ AC+CB \cong AD+BD \end{array}\right\} \Longrightarrow AD \cong BC \text{ i } AC \cong BD$$

Uzmimo tačku B'' takvu da je $BB' \cong BB''$ i $B-B'-B''$

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle CB'B \cong \measuredangle CB'B'' = \text{prav} \\ B'C \cong B'C \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta CBB' \cong \Delta CB''B' \Downarrow BC \cong B''C$$



Slično:

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle BB'D \cong \measuredangle B''B'D = \text{prav} \\ DB' \cong DB' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta DB'B \cong \Delta DB'B'' \Downarrow BD \cong B''D$$

Posmatrajmo dijagonalu AB'' četvorougla $\square ACB''D$ $(AC+CB'' \cong AD+DB'')$

Označimo sa $\{S\} = AB'' \cap CD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle SA'A \cong \measuredangle SB'B'' \\ \text{(prav ugao)} \\ \measuredangle A'SA \cong \measuredangle B'SB'' = \lambda \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ AA' \cong B''B' \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta ASA' \cong \Delta B''SB' \Downarrow AS \cong SB''$$

Sad ako duž SD nanesem na polupravu $pp[S,C)$ nije teško pokazati da se mora desiti slučaj $SD \cong SC$, tj. u $\square ACB''D$ dijagonale se polove.

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong B''S \\ \measuredangle ASD \cong B''SC = \lambda \\ CS \cong SD \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ASD \cong B''SC \Downarrow \left.\begin{array}{l} AD \cong B''C \\ B''C \cong BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD \cong BC$$

q.e.d.

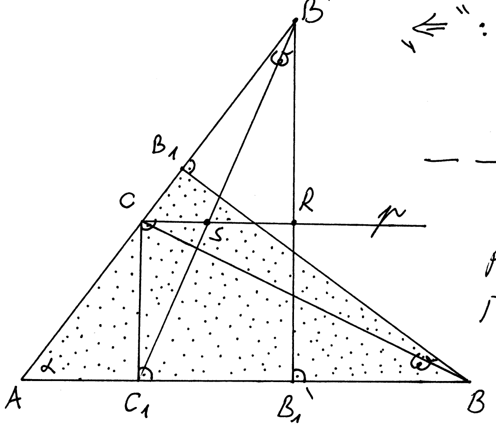
Kako je još $AC+CB \cong AD+BD$ i $AD \cong BC$ $\Downarrow$ $AC \cong BD$

q.e.d.

Dokazati da većoj visini trougla odgovara manja stranica i obrnuto.

R: postavka zadatka

$\triangle ABC$, BB_1 i CC_1 visine trougla $\Rightarrow$ $BB_1 > CC_1$ akko $AC < AB$



"$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC,\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ AC < AB\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 > CC_1$

Kako je $AC < AB$ na $p(A,C)$ postoji tačka B' takva da je $A-C-B'$ i $AB' \cong AB$.

Neka je B'_1 ortogonalna projekcija tačke B' na pravu $p(A,B)$.

Pokažimo da je $CC_1 < B'B'_1$. ...(*)

$\sphericalangle C_1CB'$ je vanjski ugao $\triangle ACC_1$ pa možemo zaključiti da je tup. U njegovoj unutrašnjosti uzmimo polupravu p takvu da je $\sphericalangle C_1Cp = 90^\circ$. Označimo sa $\{R\} = p \cap B'B'_1$ (ovaj presjek postoji zato što postoji $\{S\} = p \cap B'C_1$ a p ne može sjeći duž $C_1B'_1$ zato što $p \parallel p(A,B)$). Nije teško pokazati da je $CC_1 \cong RB'_1$. Kako $B'_1 - R - B'$ i $RB'_1 \cong CC_1 \Rightarrow CC_1 < B'B'_1$.

Posmatrajmo $\triangle ABB_1$ i $\triangle AB'B'_1$. Ti trouglovi imaju dva ugla jednaka (α i ugao od 90°) pa imaju i treći ugao podudaran.

Sad imamo: $\left.\begin{array}{c}\sphericalangle B_1AB \cong \sphericalangle B'AB'_1 = \alpha\\ AB \cong AB'\\ \sphericalangle ABB_1 \cong \sphericalangle AB'B'_1 = \omega\end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ABB_1 \cong \triangle AB'B'_1 \Downarrow BB_1 \cong B'B'_1$

(*) $\Rightarrow$ $CC_1 < BB_1$ q.e.d.

"$\Rightarrow$": $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ BB_1 > CC_1\end{array}\right\} \Rightarrow AC < AB$

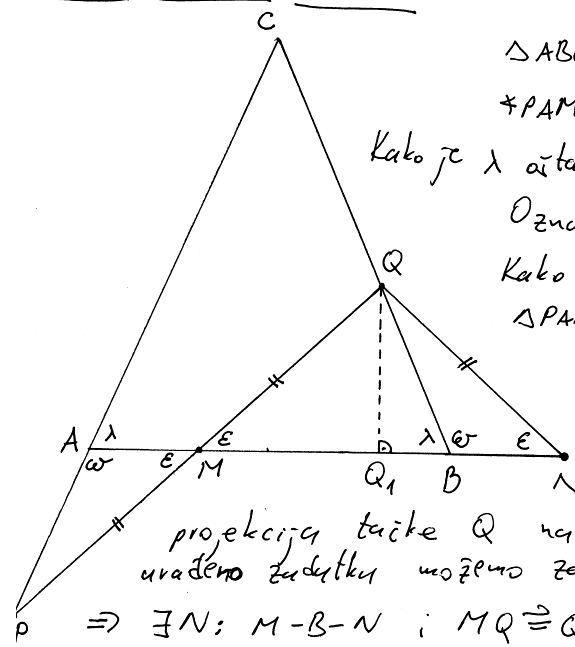
Završiti sami. Uputa: Koristiti "$\Leftarrow$".

[Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. ...]

Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave AC i BC u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

R: postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ jkk sa osnovicom } AB\\ M \in AB,\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C)\\ P-M-Q \text{ i } PM \cong MQ\end{array}\right\} \Rightarrow AP \cong BQ$



$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ABC = \lambda$

$\sphericalangle PAM + \sphericalangle BAC = \omega + \lambda = 180^\circ$

Kako je λ oštar ugao $\Rightarrow$ ω tup

Označimo sa $\varepsilon = \sphericalangle PMA$

Kako je $\sphericalangle BAC$ vanjski ugao $\triangle PAM$ $\Rightarrow$ $\lambda > \varepsilon$

$\triangle MBQ \Rightarrow \varepsilon < \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow MQ > BQ$.

Neka je Q_1 ortogonalna projekcija tačke Q na stranicu MB. Prema ranije urađenom zadatku možemo zaključiti da je $MQ_1 > Q_1B$

$\Rightarrow \exists N: M-B-N$ i $MQ \cong QN$.

$\left.\begin{array}{c}MQ_1 \cong NQ_1,\\ \sphericalangle MQ_1Q \cong \sphericalangle NQ_1Q = 90^\circ\\ QQ_1 \cong QQ_1\end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MQ_1Q \cong NQ_1Q \Downarrow MQ \cong NQ$ i $\sphericalangle Q_1MQ \cong \sphericalangle Q_1NQ = \varepsilon$

Sad imamo:

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle NBQ \cong \sphericalangle MAP = \omega\\ \sphericalangle BNQ \cong \sphericalangle PMA = \varepsilon\\ PM \cong QN\end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle BNQ \cong \triangle PAM \Downarrow PM \cong QN$

q.e.d.

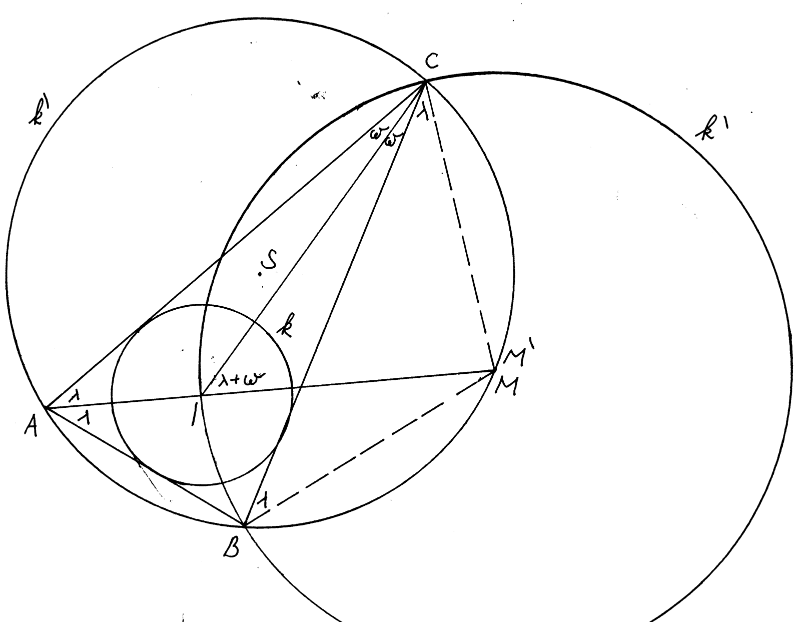
U ΔABC je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko ΔBCI nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko ΔABC.

Rj.

postavka zadatka ΔABC,

$$\left.\begin{array}{l} k(I,r) \text{ upisana kružnica u } \Delta ABC \\ k'(S,r') \text{ kružnica opisana oko } \Delta ABC \\ k''(M,r'') \text{ kružnica opisana oko } \Delta BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$$

— — —



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\measuredangle CAI \cong \measuredangle BAI = \lambda$ i $\measuredangle ACI \cong \measuredangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow \measuredangle M'BC \cong \measuredangle CAM' = \lambda$ i $\measuredangle BCM' \cong \measuredangle BAM' = \lambda$

$\Delta CBM'$ je jkk sa osnovicom u $BC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\measuredangle M'IC$ je vanjski ugao $\Delta AIC \Rightarrow \measuredangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\Delta M'CI$ je jkk sa osnovicom u $IC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow M'$ je centar opisane kružnice $\Delta CIB \Rightarrow M \equiv M'$

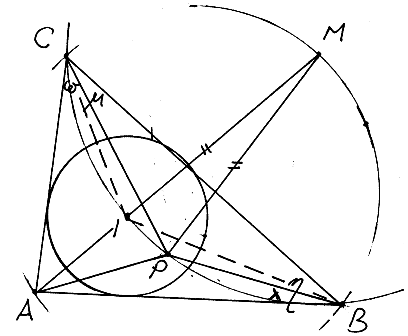
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.

Neka je I centar upisane kružnice ΔABC. U unutrašnjosti ΔABC data je tačka P takva da je

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

Dokazati da je $AP \geq AI$ te da jednakost vrijedi akko se tačka P podudara sa tačkom I.

Rj.



postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ k(I,r) \text{ kružnica upisana u } \Delta ABC \\ P \text{ tačka u unutrašnjosti } \Delta ABC \text{ takva} \\ \quad \measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB. \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AP \geq AI$

— — —

Uvedimo oznake $\measuredangle PBA = \lambda$, $\measuredangle PCA = \omega$, $\measuredangle PBC = \eta$, $\measuredangle PCB = \mu$.

$\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$

$$\text{Tada } \left.\begin{array}{l} \lambda + \omega = \mu + \eta \\ \lambda + \omega + \mu + \eta = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \omega = \mu + \eta = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad /:2$

$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ pa $\mu + \eta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\measuredangle BPC = 180^\circ - (\mu + \eta) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ...(*)

$\measuredangle BIC = 180^\circ - (\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = 180^\circ - (\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow \square IPBC$ je tetivni četverougao.

Prema prethodnom zadatku centar opisane kružnice ΔBCI se nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice opisane oko ΔABC. Označimo tu tačku sa M. Imamo $IM \cong PM$.

Posmatramo ΔAMP. Imamo $AM < AP + PM$ tj. $AI + MI < AP + PM$

$\Rightarrow AI < AP$ q.e.d.

(Jednakost vrijedi samo u slučaju kada $P \equiv I$).

Aksioma paralelnosti

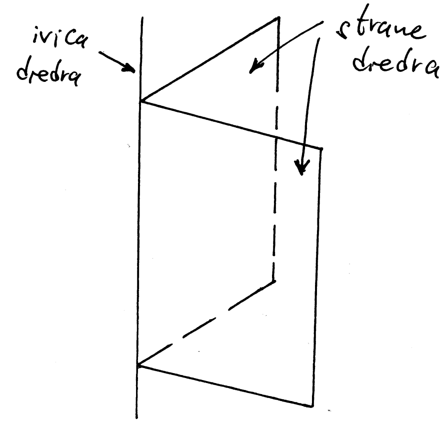
Još od doba starih grka pa sve do 19 vijeka postavljalo se pitanje koliko je pravih koje sadrže tačku A a ne sijeku pravu a ($A \notin a$). Tek je u 19 vijeku postalo jasno da se ovaj problem ne može riješiti na osnovu do tada poznatih aksioma i njihovih posljedica. Problem je riješen tako što je uvedena nova aksioma - aksioma paralelnosti. To je aksioma koja čini V grupu aksioma.

V_E Za svaku pravu a i za svaku tačku A koja ne pripada pravoj a postoji jedna i samo jedna prava b koja sadrži tačku A a ne siječe pravu a.

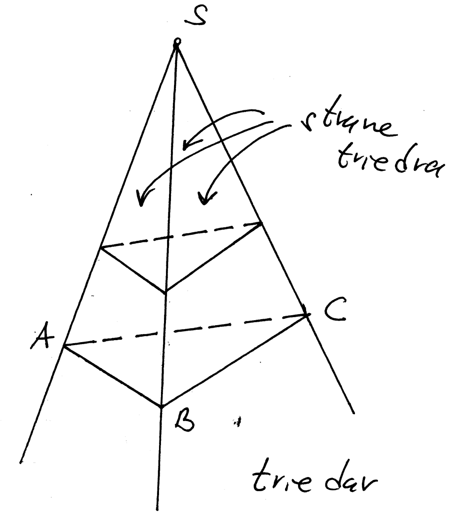
Neka su a i b komplanarne prave. Kažemo da je prava a paralelna sa pravom b i to zapisujemo ovako $a \parallel b$ ako je $a \cap b = \emptyset$ ili je $a \equiv b$.

Diedar

Diedar je skup od dvije poluravni čija je ivica zajednička prava. Ta prava se zove ivica diedra a poluravni su strane diedra.



diedar



triedar

Triedar (trostrani poliedarski ugao)

Triedar je $\underbrace{\quad}_{}$ geom. tijelo napravljeno od tri poluprave koje imaju početak u istoj tački i ne leže u jednoj ravni. Uglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane triedra

Tetraedar - trostrana piramida

Poliedar

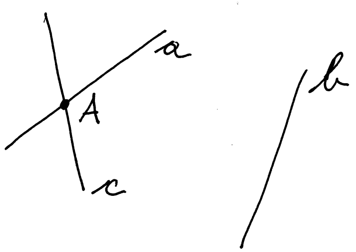
Opisna definicija: Poliedar je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

\# Date su tri komplanarne prave a, b, c. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati

Rj:

Ako prava a nije paralelna sa pravom c, kako su a i c u istoj ravni to postoji tačka A takva da

$$\{A\} = a \cap c$$



Sada tačka A sadrži dvije različite prave koje su paralelne sa pravom b #kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

Prema tome mora biti $a \parallel c$.

\# Neka su a, b i c tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokazati.

Rj:

Kako su svake dvije prave komplanarne neka je

$$a, b \subseteq \alpha$$
$$a, c \subseteq \beta$$
$$b, c \subseteq \gamma$$

Primjetimo da odavde odmah slijedi da

$$\alpha \cap \beta = a, \quad \alpha \cap \gamma = b, \quad \beta \cap \gamma = c$$

1° Pretpostavimo da se prave a i b sijeku u tački A tj. $a \cap b = \{A\}$. Tada

$$\left.\begin{array}{l} A \in a \text{ i } a \subseteq \beta \Rightarrow A \in \beta \\ A \in b \text{ i } b \subseteq \gamma \Rightarrow A \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \beta \cap \gamma = c$$

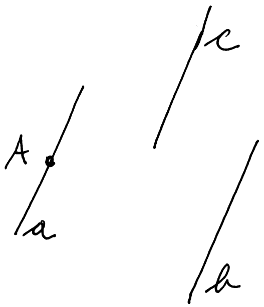
$A \in c$. Slično bi pokazali i za $a \cap c = \{A\}$ ili za $b \cap c = \{A\}$.

2° $a \parallel b \Rightarrow$ ako bi $a \cap c = \{A\}$, prema prvom dijelu zadatka bi imali $A \in b$ tj. $a \cap b = \{A\}$ #kontradikcija (sa $a \parallel b$)

Prema tome $a \parallel c$.

Neka su a, b i c tri prave u prostoru. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati.

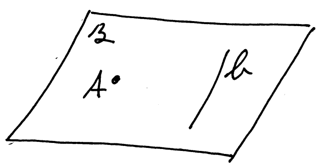
Rj:

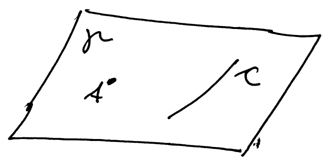


Uzmimo na pravoj A tačku A, i neka su β i γ dvije ravni takve da

$A \in \beta$ i $b \subseteq \beta$

i $A \in \gamma$ i $c \subseteq \gamma$.





Kako je $A \in \beta \cap \gamma$ ($A \in \beta$ i $A \in \gamma$) to $\exists a'$ t.d.

$$a' = \beta \cap \gamma$$

Sada su: a' i b komplanarne (jer pripadaju ravni β)
a' i c komplanarne (jer pripadaju ravni γ)
b i c komplanarne (jer su paralelne)

Dakle imamo tri prave u prostoru a', b, c od kojih su svake dvije komplanarne i $b \parallel c$. Na osnovu prethodnog zadatka $a' \parallel b$ i $a' \parallel c$.

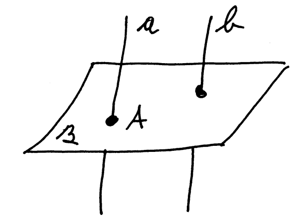
Ako bi a i a' bile dvije različite prave tada bi tačka A sadržavala dvije prave a i a' od koje su obe paralelne sa pravom b #kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow a \parallel c$ q.e.d.

Prava a je <u>paralelna</u> sa ravni α ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \parallel \alpha$.

Ako jedna od dvije paralelne prave siječe ravan siječe je i druga. Dokazati.

Rj: Neka je $a \parallel b$ i pretpostavimo da prava a siječe ravan β u tački A.

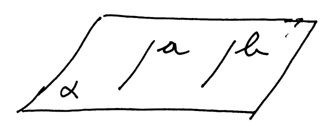


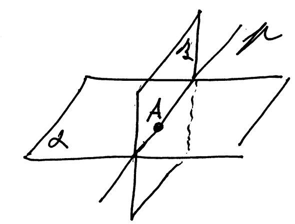
$a \parallel b$, β : $\beta \cap a = \{A\}$

Trebamo dokazati da i prava b siječe ravan β.

Pretpostavimo SUPROTNO, tj. predpostavimo da b ne siječe β. Kako su a i b paralelne one odredjuju neku ravan α

$a \parallel b$ α

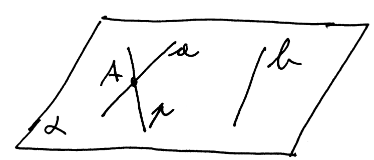




$A \in \alpha$ i $A \in \beta \Rightarrow \exists!\, p = \alpha \cap \beta$

Kako b ne siječe β to $b \cap p = \emptyset$.

Sada u ravni α postoje dvije prave a i p od kojih svaka sadrži tačku A a ne siječe pravu b



#kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow b$ siječe ravan β

Prava a je normalna (okomita) na ravan α ako ona siječe ravan u nekoj tački A i ako je okomita (normalna) na svaku pravu iz ravni α koja sadrži tačku A. To zapisujemo ovako $a \perp \alpha$.

#v Ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga. Dokazati.

SPISAK AKSIOMA

Euklidska geometrija

I Aksiome incidencije (pripadanja)

I_1 Za svake dve tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

I_6 Ako su dve tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

II Aksiome poretka

II_1 Ako je $(A - B - C)$, tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C - B - A)$.

II_2 Za svake dve tačke A i B postoji tačka C, takva da je $(A - B - C)$.

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A-B-C)$, $(B-C-A)$, $(C-A-B)$.

II_4 (**Pašova aksioma**) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako važi relacija $(A-p-B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B-p-C)$ i $(C-p-A)$.

III Aksiome podudarnosti

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

III_2 Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III_3 Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom p', za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao ab, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao ab podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

III_5 Ako za trouglove ABC i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

IV Aksiome neprekidnosti

IV_1 (**Arhimedova aksioma**) Neka su AB i CD proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom AB, tako da je

$$(A-A_1-A_2), (A_1-A_2-A_3), (A_2A_3A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj n, takav da je (A_1-B-A_n).

IV_2 (**Kantorova aksioma**) Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.

V Aksioma paralelnosti

V_E Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne seče pravu a.

Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

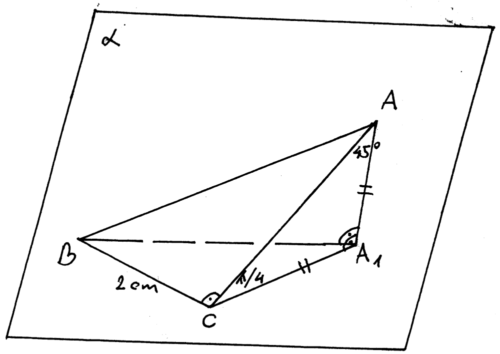
U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

V_L (**Aksioma Lobačevskog**) Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoje u ravni aA bar dve prave koje su incidentne sa tačkom A i ne seku pravu a.

Elementarni zadaci iz euklidskog prostora

\# Pravougli trougao ΔABC, sa pravim uglom kod tjemena C, naslanja se katetom BC na ravan α i nagnut je prema ravni pod uglom od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti odstojanje tjemena A od ravni α, ako je $BC = 2\text{ cm}$ i $AB : AC = 3 : 1$.

Rj.



Ako sa A_1 označimo ortogonalnu projekciju tačke A na ravan α, u zadatku se traži da odredimo dužinu AA_1.

ΔAA_1C pravougli i $\measuredangle ACA_1 = 45^\circ \Rightarrow \measuredangle CAA_1 = 45^\circ$

$$\Rightarrow AA_1 \cong A_1C \Rightarrow AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 2AA_1^2$$

$$AC = \sqrt{2}\, AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \quad \ldots(1)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = 3AC$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9AC^2 - AC^2$

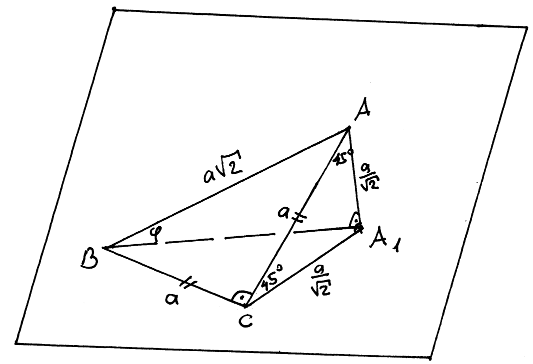
$$BC^2 = 8AC^2$$

$$BC = 2 \Rightarrow BC^2 = 4$$

$$\Rightarrow 8AC^2 = 4 \Rightarrow AC^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{(1)}{\Longrightarrow} AA_1 = \frac{1}{2}$$

\# Nastavak prethodnog zadatka. Odrediti ugao φ između hipotenuze i ravni α.

Rj.

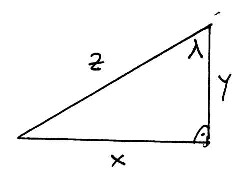


ΔABC jkk pravougli

$$AB^2 = a^2 + a^2$$

$$AB = a\sqrt{2}$$

Kako glasi definicija sinus ugla pravouglog trougla?



$$\sin\lambda = \frac{x}{z}$$

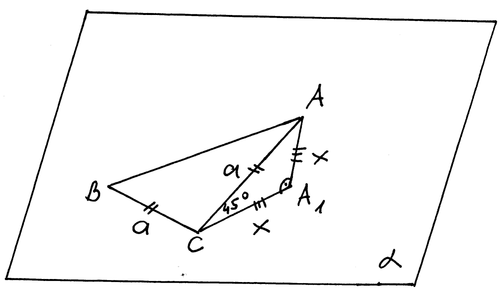
$$\cos\lambda = \frac{y}{z}$$

Prema tome $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AB} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Jedna od kateta jednakokrakog pravouglog trougla ΔABC (AC i BC su katete, AB hipotenuza) nalazi se u ravni α, a druga je nagnuta prema ravni pod uglom od 45°. Ako je A_1 ortogonalna projekcija tačke A na ravan α, a stranica BC ima dužinu a, izračunati dužine stranica trougla ΔACA_1.

Rj.



ΔABC jkk $\overset{BC=a}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow AC = a$.

A_1 ortogonalna projekcija

$\Rightarrow AA_1 \perp CA_1$

Zbir uglova u ΔAA_1C je $180^\circ \Rightarrow \angle CAA_1 = 45^\circ$.

ΔAA_1C jkk pravougli pa prema Pitagorinoj teoremi

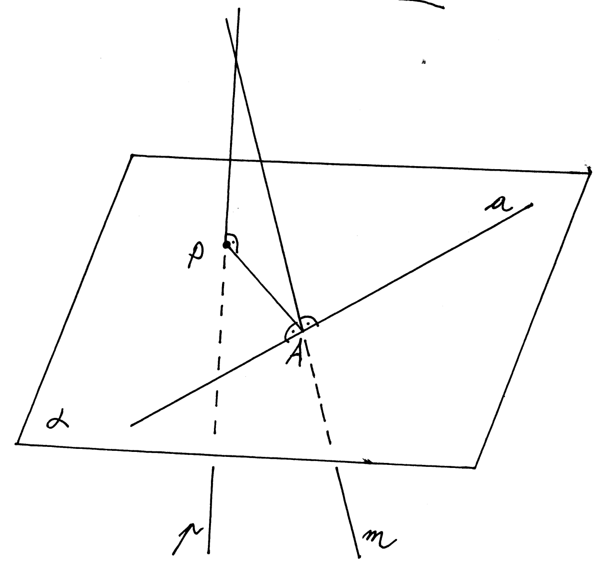
$$a^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Dužine stranica ΔACA_1 su $AC = a$, $CA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

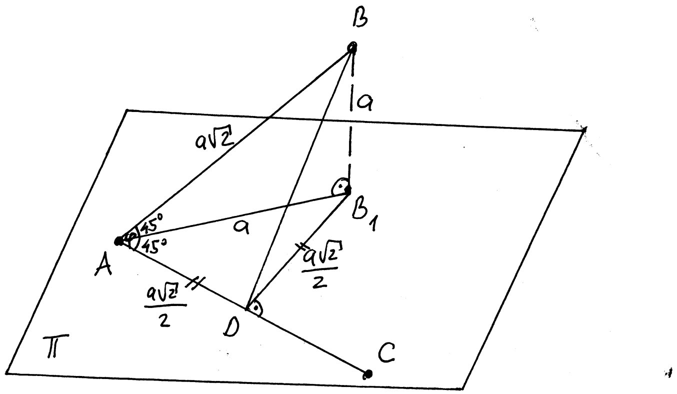
Teorema o tri normale



Neka je data ravan α i prava a u toj ravni. Neka je P tačka u ravni t.d. $P \notin \alpha$. Ako je prava p normalna na ravan α u tački P (vidi sliku) i ako je A podnožje normale iz tačke P na pravu a, tada je svaka prava m, koja sadrži tačku A i siječe pravu p, normalna na pravoj a (važi i obrnuta teorema).

Duž AB je nagnuta prema ravni π pod uglom od $45°$. Druga duž, duž AC, leži u ravni π i sa projekcijom duži AB određuje ugao od $45°$. Izračunati ugao $\measuredangle BAC$.

Rj.



Neka je AB_1 projekcija duži AB na ravan π. Primjetimo da je ΔABB_1 pravougli (ZAŠTO?), a kako je $\measuredangle BAB_1=45°$

$\Rightarrow \measuredangle ABB_1=45° \Rightarrow \Delta ABB_1$ jkk pravougli.

Pa ako stranicu AB_1 označimo sa a imamo da $BB_1=a$

$\Rightarrow AB^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{2}$.

Sad odredimo tačku D na pravoj AC, tako da je $B_1D\perp AC$. Primjetimo da je trougao ΔADB_1 jkk pravougli (ZAŠTO?)

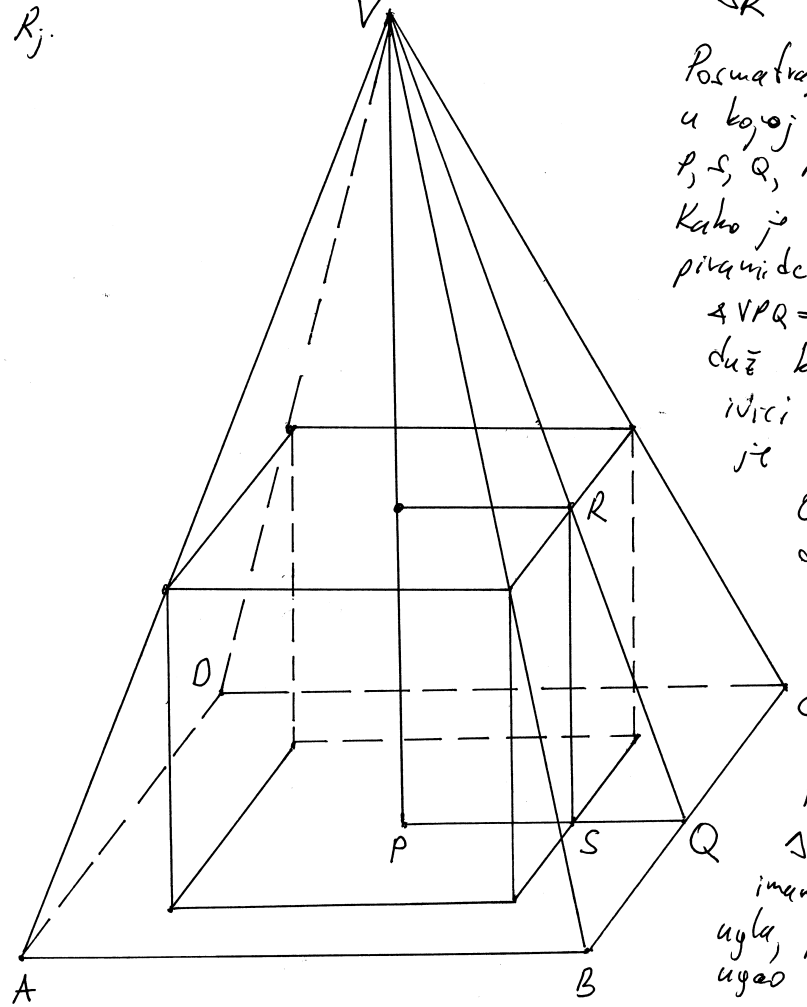
$\Rightarrow AD=DB_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ZAŠTO?).

Sad ako posmatramo prave $p(A,C)$, $p(B_1,D)$, $p(B,B_1)$ Prema teoremi o tri normale slijedi da je $BD\perp AC$.

ΔABD pravougli $\Rightarrow \cos\varphi=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=60°$.

U pravilnu četverostranu piramidu upisana je kocka, čija jedna strana leži u osnovi piramide, a ivice njoj naspremne strane pripadaju bočnim stranama piramide (vidi sliku). Pokazati da je $\frac{PQ}{PV}=\frac{SQ}{SR}$.

Rj.



Posmatrajmo ravan u kojoj su tačke P, S, Q, R, V.
Kako je PV visina piramide to je $\measuredangle VPQ=90°$. SR je duž koja pripada ivici kocke pa je $RS\perp PQ$.
Odavde vidimo da je

$p(P,V)\parallel p(R,S)$

$\Downarrow$

$\measuredangle QRS \cong \measuredangle QVP = \alpha$

Primjetimo da u ΔPQV i ΔSQR imamo dva podudarna ugla, pa je i treći ugao podudaran.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle VPQ \cong \measuredangle RSQ = 90° \\ \measuredangle QVP \cong \measuredangle QRS = \alpha \\ \measuredangle PQV \cong \measuredangle SQR \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta PQV \sim \Delta SQR$$

$$\Downarrow$$

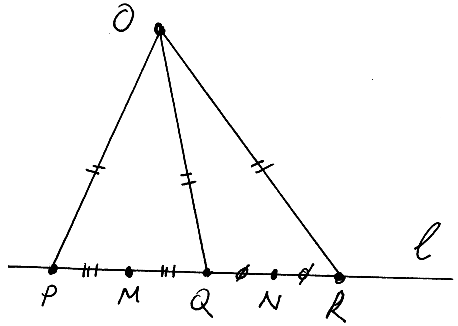
$$\frac{PQ}{SQ}=\frac{PV}{SR} \Rightarrow \frac{PQ}{PV}=\frac{SQ}{SR} \text{ q.e.d.}$$

Razni zadaci

(#) Data je prava l i tri tačke $P, Q, R \in l$ takve da je $P-Q-R$. Dokazati da ne postoji tačka $O \notin l$ takva da su trouglovi ΔPQO i ΔOQR jkk, redom sa osnovicama PQ i QR.

jednakokraki

Rj.



Drugim riječima trebamo dokazati da ne postoji tačka O takva da $O \notin l$ i $OP \cong OQ \cong OR$.

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da takva tačka postoji. Neka su M i N sredine duži PQ i QR redom.

Tada imamo $\measuredangle PMO \cong \measuredangle QMO$ i $\measuredangle QNO \cong \measuredangle RNO$ (ZAŠTO?)

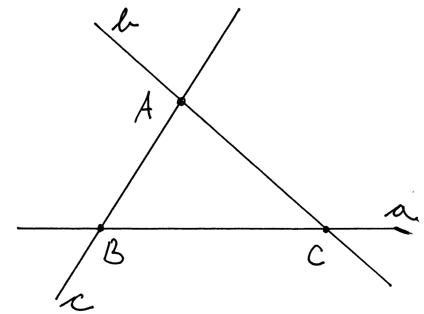
pa je $OM \perp PQ$ i $ON \perp QR$

#kontradikcija
(sa teoremom o jedinstvenosti normale iz date tačke na datu pravu)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Data tačka O ne postoji.

(#) Skup pravih ima osobinu da se svake dvije prave iz tog skupa sijeku. Ako sve prave iz tog skupa ne prolaze kroz istu tačku dokazati da sve one pripadaju istoj ravni.

Rj. Pretpostavimo da postoje tri prave a, b i c koje zadovoljavaju uslove zadatka, a ne prolaze kroz istu tačku



Neka je
$b \cap c = \{A\}$
$a \cap c = \{B\}$
$a \cap b = \{C\}$

Tačke A, B i C su nekolinearne (ZAŠTO?) i određuju ravan α.

Sad primjetimo da

$B, C \in \alpha, \quad p(B,C) \equiv a \quad \Rightarrow \quad a \subseteq \alpha$

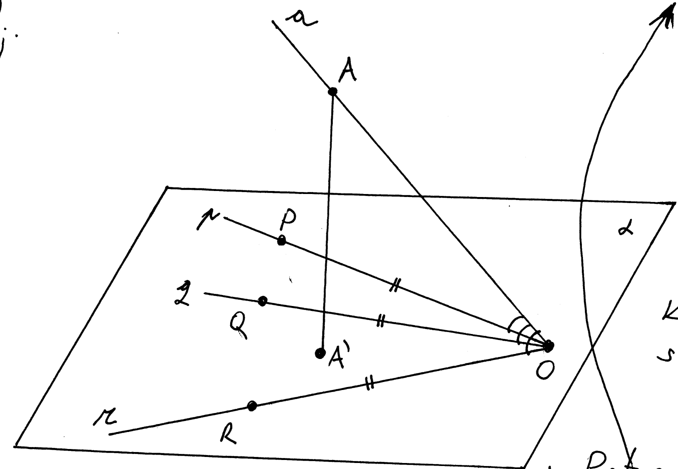
$A, C \in \alpha, \quad p(A,C) \equiv b \quad \Rightarrow \quad b \subseteq \alpha$

$A, B \in \alpha, \quad p(A,B) \equiv c \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \alpha$

Neka je m proizvoljna prava iz navedenog skupa. Kako prava m siječe pravu a i pravu b i pravu c, koje nemaju zajedničku tačku ($a \cap b \cap c = \emptyset$), ona sa ravni α ima bar dvije zajedničke tačke, odakle slijedi $m \subseteq \alpha$. Prema tome, sve prave pripadaju ravni α.

Prava a siječe ravan α u tački O i pri tome obrazuje podudarne uglove sa tri prave koje prolaze kroz tačku O i leže u ravni α. Dokazati da je prava a normalna na ravan α.

Rj.



Neka su p, q i r tri prave u ravni α koje prolaze kroz tačku O i pri tome je $\measuredangle ap = \measuredangle aq = \measuredangle ar$. Neka su P, Q i R redom tačke na pravima p, q i r za koje vrijedi $PO \cong QO \cong RO$. Primjetimo da tačke P, Q i R pripadaju krugu sa centrom u tački O poluprečnika PO. Neka je A proizvoljna tačka na pravoj a i neka je A' njena ortogonalna projekcija na ravan α. Ako prava a nije normalna na ravan α tada $O \neq A'$. Ako posmatramo trouglove ΔAPO, ΔAQO, ΔAQR iz podudarnosti SUS imamo $\Delta APO \cong \Delta AQO \cong ARO$ iz čega slijedi $AP \cong AQ \cong AR$. Dalje, kako je $p(A,A') \perp \alpha$, iz pravouglih trouglova $\Delta AA'P$, $\Delta AA'Q$, $\Delta AA'R$ slijedi $A'P \cong A'Q \cong A'R$.

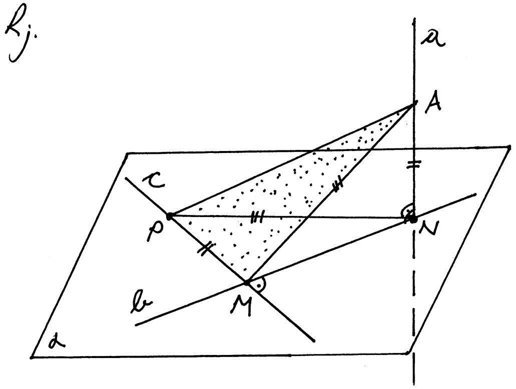
nastavak: Sad kako je $A'P \cong A'Q$ to $A' \in$ simetrali stranice PQ, iz $A'R \cong A'Q \Rightarrow A' \in$ simetrali QR i iz $A'P \cong A'R \Rightarrow A' \in$ simetrali PR. Kako se simetrale ΔPQR sijeku u istoj tački to $O \equiv A'$ #kontradikcija.

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $a \perp \alpha$.

Prava a je normalna na ravan α i siječe je u tački N. Neka je b proizvoljna prava ravni α incidentna sa tačkom N. Ako je M $(M \neq N)$ tačka prave b, i c prava ravni α koja sadrži tačku M i normalna je na pravu b, tada je prava c normalna na pravu $p(M,A)$, gdje je A proizvoljna tačka prave a. Dokazati.

Napomena: Ova tvrdnja je poznata pod imenom Teorema o tri normale.

Rj.



$a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{N\}$
b proizv. prava, $N \in b$
$c \perp b$, $M \in b$, $M \in c$
A proizv. tačka $\in a$
$\Rightarrow p(M,A) \perp c$.

Rješenje 1

Izaberimo tačku P na pravoj c takvu da $MP \cong AN$, i posmatrajmo trouglove ΔMNA i ΔNMP. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong PM \\ \measuredangle ANM \cong \measuredangle NMP = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. SUS}} \Delta MNA \cong \Delta NMP \Downarrow NP \cong MA$$

Sad posmatrajmo trouglove ΔAMP i ΔANP. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong AN \\ MA \cong PN \\ AP \cong AP \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{pod SSS}} \triangle AMP \cong \triangle PNA$$

$$\Downarrow$$

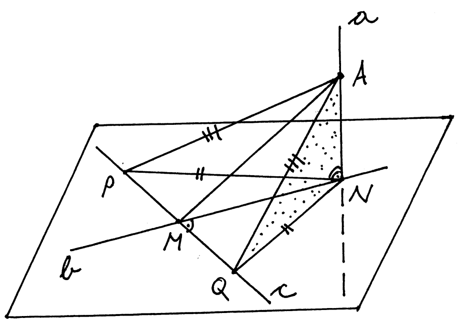
$$\measuredangle PMA \cong \measuredangle PNA.$$

Kako je $\measuredangle ANP$ = prav ugao (ZAŠTO?) to je

$\measuredangle AMP$ = prav ugao

q.e.d.

Rješenje 2



Izaberimo tačke P i Q na pravoj c, tako da je M sredina duži PQ. Posmatrajmo trouglove $\triangle MNP$ i $\triangle MNQ$.

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ \measuredangle NMP \cong \measuredangle NMQ = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sus}} \triangle MNP \cong \triangle MNQ$$

$$\Downarrow$$

$$PN \cong NQ$$

Sad posmatrajmo trouglove $\triangle PNA$ i $\triangle QNA$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PN \cong QN \\ \measuredangle PNA \cong \measuredangle QNA = 90^\circ \\ AN \cong AN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. sus}} \triangle PNA \cong \triangle QNA$$

$$\Downarrow$$

$$PA \cong QA$$

Na kraju posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle AMQ$

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ PA \cong QA \\ AM \cong AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud SSS}} \triangle PMA \cong \triangle QMA$$

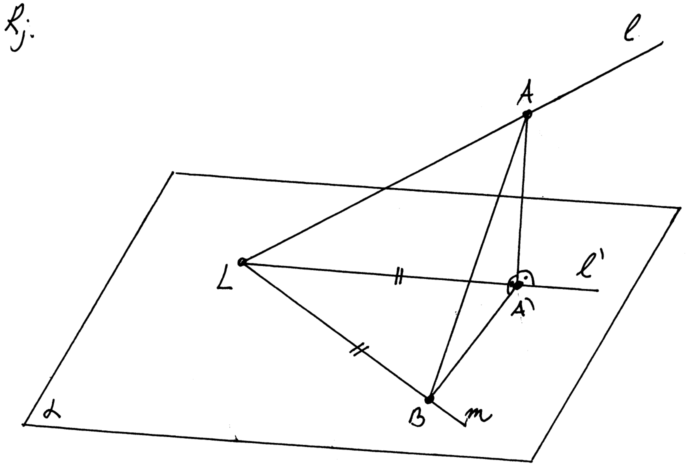
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle PMA \cong \measuredangle AMQ.$$

Kako su ovo dva naporedna ugla to je $p(A,M) \perp c$ q.e.d.

Neka je ℓ prava koja nije normalna na ravan α i siječe je u tački L. Od svih pravih ravni α koje prolaze kroz tačku L, najmanji ugao sa pravom ℓ obrazuje njena ortogonalna projekcija na ravan α. Dokazati.

Rj.



tada je $\ell' = p(L,A')$ normalna projekcija poluprave ℓ na ravan α

Neka je A proizvoljna tačka poluprave ℓ, i neka je A' njena ortogonalna projekcija na ravan α (ZAŠTO? – A, L, A' su nekolinearne tačke, one određuju neku ravan β, $\ell' \subseteq \alpha \cap \beta$). Neka je dalje m, $m \neq \ell'$ proizvoljna poluprava ravni α, čiji je početak tačka L. Trebamo dokazati da je $\measuredangle ALm > \measuredangle AL\ell'$.

Obilježimo sa B tačku poluprave m takvu da je $LB \cong LA'$.

Kako je $p(A,A') \perp \alpha$ to je $\measuredangle AA'B = 90^\circ$ pa je $AB > AA'$.

Sada se prisjetimo sljedeće teoreme iz EG I:

Teo. Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ važi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$ tada $BC > B_1C_1$ akko $\measuredangle BAC > \measuredangle B_1A_1C_1$.

Sad ako posmatramo trouglove $\triangle ALA'$ i $\triangle ALB$ kako je $AL \cong AL$, $LA' \cong LB$ i $AB > AA'$ prema navedenoj teoremi $\measuredangle ALB > \measuredangle ALA'$ q.e.d.

Euklidski prostor

-zadaci posuđeni iz knjige:
Problemi iz geometrije (metodička zbirka zadataka);
Ratko Tošić, Vojislav Petrović;
Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu-

Ugao između mimoilaznih pravih a i b definiše se kao ugao između pravih a' i b' koje se seku i pri tome je $a' \parallel a$ i $b' \parallel b$. Dokazati da ugao između mimoilaznih pravih a i b ne zavisi od izbora pravih a' i b', tj. da su svi tako dobijeni uglovi međusobno podudarni.

Prava je normalna na ravan ako i samo ako je normalna na dve prave te ravni koje se seku. Dokazati.

Uputa:

Iskoristiti definiciju normalnosti prave i ravni i prethodni zadatak.

#3. Data je prava a i na njoj tačka M. Dokazati da sve prave koje su incidentne sa tačkom M i normalne na pravu a, pripadaju istoj ravni.

Uputa:

Neka su prave m i n normalne na pravu a u tački M. Dokazati da sve normale povučene na pravu a u tački M, pripadaju ravni mn.

Tri prave m, n i p seku ravan α u tački A. Ako su uglovi koje prave m, n i p obrazuju sa ravni α međusobno podudarni, tada te prave ne mogu biti komplanarne. Dokazati.

R.

Neka je l prava normalna na ravan α u tački S. Obeležimo sa M, N i P tačke polupravih m, n i p, redom, takve da je $|SM| = |SN| = |SP|$, a sa M', N' i P' njihove ortogonalne projekcije na pravu l. Iz podudarnosti trouglova SMM', SNN' i SPP' sledi $|SM'| = |SN'| = |SP'|$, odnosno $M' \equiv N' \equiv P' \equiv L$. Kako tačke M, N, P i L pripadaju jednoj ravni koja je normalna na pravu l (preth. zad.), one pripadaju kružnici sa centrom u tački L.

Pretpostavimo sada da su prave m, n i p komplanarne. Tada je

$$r(m,n,p) \cap r(M,N,P,L) = p(M,N,P),$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da tačke M, N i P pripadaju jednoj kružnici.

Normalna projekcija oštrog (tupog) ugla na ravan koja je paralelna jednom njegovom kraku je oštar (tup) ugao. Dokazati.

Uputa:

Utvrditi najpre šta je ortogonalna projekcija pravog ugla na ravan koja je paralelna sa jednim njegovim krakom.

Rastojanje između mimoilaznih pravih a i b definiše se kao dužina duži AB, gde su A i B redom tačke preseka pravih a i b sa njihovom zajedničkom normalom. Ako je X proizvoljna tačka prave a i Y - proizvoljna tačka prave b, dokazati da duž XY nije manja od rastojanja između pravih a i b.

Uputa:

Uočiti par paralelnih ravni koje su incidentne sa datim pravama.

U prostoru su date duži AB i CD koje ne leže u jednoj ravni. Ako su tačke M i N redom njihova sredine, dokazati da je

$$\frac{|AD| + |BC|}{2} > |MN| .$$

Uputa:

Posmatrati trougao ADB', gde je $B' = \Sigma_N(B)$.

Date su tri prave od kojih su svake dve mimoilazne. Koliko ima pravih koje seku sve tri prave?

Uputa:

Beskonačno mnogo.

Dat je prostorni četvorougao $ABCD$ i tačke P, Q, R i S, takve da $P \in p(A,B)$, $Q \in p(B,C)$, $R \in p(C,D)$ i $S \in p(D,A)$. Potreban i dovoljan uslov da tačke P, Q, R i S budu komplanarne je da važi

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1 .$$

Dokazati.

Uputa:

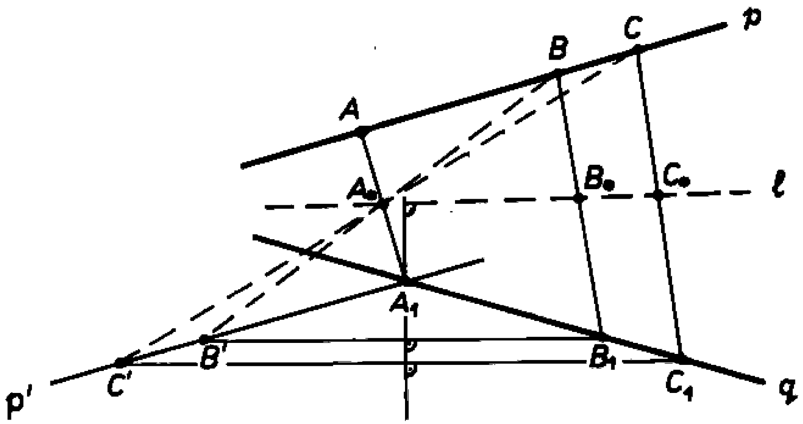
Uslov je potreban. Projektovati tačke A, B, C, D na ravan određenu tačkama P, Q ,R i S.

\# (Teorema Hjelmsleva) U ravni su date prave p i p_1, tačke A, B, C na pravoj p i tačke A_1, B_1, C_1 na pravoj p_1, pri čemu je $[AB] \cong [A_1B_1]$, $[BC] \cong [B_1C_1]$, $(A - B - C)$ i $(A_1 - B_1 - C_1)$. Dokazati da sredine duži AA_1, BB_1 i CC_1 pripadaju jednoj pravoj.

Rj. Neka su A_0, B_0 i C_0 redom sredine duži AA_1, BB_1 i CC_1 (sl. 22). Neka je, dalje, $p' = \sigma_{A_0}(p)$, $B' = \sigma_{A_0}(B)$ i $C' = \sigma_{A_0}(C)$. Kako je $\sigma_{A_0}(A) = A_1$, to je $[A_1B'] \cong [A_1B_1]$ i $[A_1C'] \cong [A_1C_1]$. Znači, trouglovi $A_1B'B_1$ i $A_1C'C_1$ su jednakokraki, pa su sredine osnovica $B'B_1$ i $C'C_1$ i tačka A_1 kolinearne tačke. (Zašto?) Prava l koja je određena ovim tačkama je zajednička normala pravih $B'B_1$ i $C'C_1$.

Iz trougla $BB'B_1$ sledi

$$l \perp p(A_0, B_0) \quad \text{(zad. 92(b))}, \tag{1}$$



Sl. 22.

a iz trougla $CC'C_1$

$$l \perp p(A_0, C_0). \tag{2}$$

Kako je normala iz tačke A_0 na pravu l jedinstvena, tačke A_0, B_0 i C_0 su kolinearne.

\# U prostoru su date prave a i b. Neka su M_1, M_2, M_3 tačke prave a i N_1, N_2, N_3 tačke prave b, takve da je $(M_1 - M_2 - M_3)$ i $(N_1 - N_2 - N_3)$. Ako je $[M_1M_2] \cong [N_1N_2]$ i $[M_2M_3] \cong [N_2N_3]$, tada sredine duži M_1N_1, M_2N_2 i M_3N_3 pripadaju jednoj pravoj. Dokazati.

Uputa:

Uporediti sa prethodnim zadatkom

\# Prava l seče pljosni diedra u tačkama A i B. Dokazati da prava l obrazuje podudarne uglove sa pljosnima diedra ako i samo ako su rastojanja tačaka A i B od ivice diedra podudarna.

Uputa:

Neka tačka A pripada pljosni α, a tačka B pljosni β diedra $\angle\alpha s\beta$. Obeležimo sa A_1 normalnu projekciju tačke A na ravan koja sadrži pljosan β, a sa B_1 normalnu projekciju tačke B na ravan koja sadrži pljosan α. Ako su A_2 i B_2 redom normalne projekcije tačaka A i B, na pravu s – ivicu diedra, dokazati prvo da su uglovi AA_2A_1 i BB_2B_1 kao uglovi normalnog preseka diedra – podudarni, a zatim da je $\angle ABA_1 \cong \angle BAB_1$, ako i samo ako je $[AA_2] \cong [BB_2]$.

\# Dokazati da prava obrazuje podudarne uglove sa pljosnima diedra ako i samo ako je paralelna sa simetralnom ravni njemu naporednog diedra.

Uputa:

Iskoristiti prethodni zadatak.

\# Neka je S skup svih pravih koje seku svaku od tri mimoilazne prave p_1, p_2, p_3. Ako u skupu S postoje tri prave koje seku neku četvrtu pravu p_4, tada sve prave iz S seku pravu p_4 ili su s njom paralelne. Dokazati.

Rj. Neka su q_1, q_2, q_3 tri prave skupa S koje seku pravu p_4. Pokazaćemo da svaka prava q_4 iz skupa S seče pravu p_4 ili je s njom paralelna.

Obeležimo sa S_{ij} tačku preseka pravih p_i i q_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ (sl. 125). Budući da se prave p_3 i q_3, p_3 i q_4, p_4 i q_3 seku, one određuju tri ravni – α, β i γ, redom. Prave određene stranicama prostornog četvorougla $S_{11}S_{21}S_{22}S_{12}$ seku ravan α u tačkama S_{31}, S_{24}, S_{32}, S_{14} i ravan γ u tačkama S_{41}, S_{23}, S_{42}, S_{13}. Na osnovu zadatka 1169, sledi

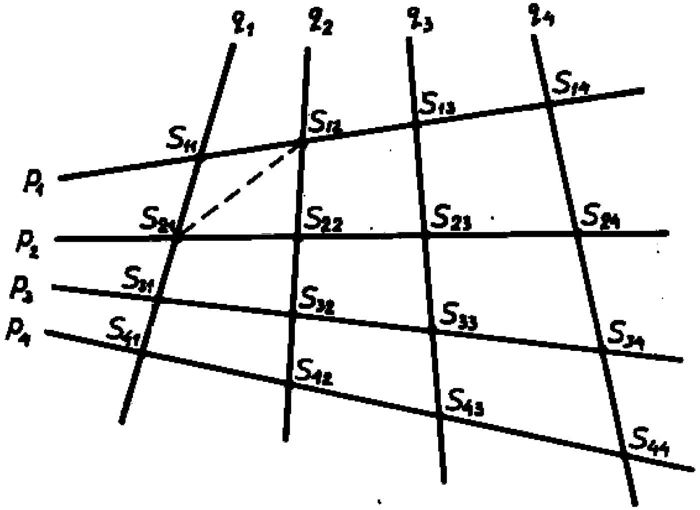
$$\frac{|S_{11}S_{31}|}{|S_{31}S_{21}|} \cdot \frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{23}S_{22}|} \cdot \frac{|S_{22}S_{32}|}{|S_{32}S_{12}|} \cdot \frac{|S_{12}S_{13}|}{|S_{13}S_{11}|} = 1,$$

$$\frac{|S_{11}S_{31}|}{|S_{31}S_{21}|} \cdot \frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{24}S_{22}|} \cdot \frac{|S_{22}S_{32}|}{|S_{32}S_{12}|} \cdot \frac{|S_{12}S_{14}|}{|S_{14}S_{11}|} = 1,$$

$$\frac{|S_{11}S_{41}|}{|S_{41}S_{21}|} \cdot \frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{23}S_{22}|} \cdot \frac{|S_{22}S_{42}|}{|S_{41}S_{12}|} \cdot \frac{|S_{12}S_{13}|}{|S_{13}S_{11}|} = 1.$$

Deobom prve jednakosti proizvodom druge i treće dobijamo

$$\frac{|S_{11}S_{41}|}{|S_{41}S_{21}|} \cdot \frac{|S_{21}S_{24}|}{|S_{24}S_{22}|} \cdot \frac{|S_{22}S_{42}|}{|S_{42}S_{12}|} \cdot \frac{|S_{12}S_{14}|}{S_{14}S_{11}|} = 1,$$



Sl. 125.

odakle sledi da tačke S_{41}, S_{24}, S_{42} i S_{14} pripadaju jednoj ravni. Stoga se prave $S_{41}S_{24}$ i $S_{14}S_{24}$, tj. prave p_4 i q_4 seku ili su paralelne.

Dat je triedar čije su sve pljosni oštrougle i čiji je jedan diedar prav. Dokazati da je presek toga triedra sa proizvoljnom ravni koja je normalna na bilo koju od ivica triedra - pravougli trougao.

R: Neka je $Sabc$ triedar u kojem je $\angle ab < 90°$, $\angle bc < 90°$, $\angle ca < 90°$ i $\angle a = 90°$. Svaka ravan normalna na ivicu a očigledno seče triedar po pravouglom trouglu. Pokaćemo da to važi i za ravni normalne na ivicu b, odnosno ivicu c.

Neka je α ravan koja seče ivicu b u tački B i pri tome je $\alpha \perp b$. Presečne prave ravni α i ravni ba i bc su normalne na pravu b, a kako je $\angle ab < 90°$ i $\angle bc < 90°$, one seku ivice a i c u tačkama A i C, redom. Pokazaćemo da je trougao ABC pravougli.

Kako je $r(A, B, C) \perp b$ i $b \subset r(a, b)$, to je $r(A, B, C) \perp r(a, b)$. Iz uslova $\angle a = 90°$, sledi $r(a, c) \perp r(a, b)$, odakle je $r(A, B, C) \cap r(a, c) = p(A, C)$ i $p(A, C) \perp r(a, b)$. Otuda je $p(A, C) \perp p(A, B)$, tj. $\angle BAC = 90°$.

Za ravni normalne na ivicu c dokaz je analogan.

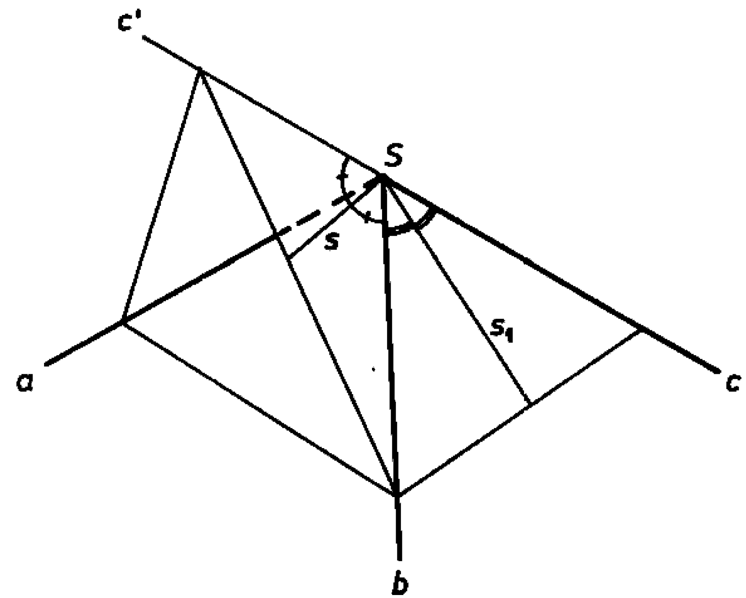
Dokazati da se tri ravni od kojih svaka sadrži po jednu ivicu triedra i simetralu naspramne pljosni seku se po jednoj pravoj.

Uputa:

Na ivicama a, b i c triedra $Sabc$ uočiti redom tačke A, B i C, takve da je $|SA| = |SB| = |SC|$.

Dat je triedar $Sabc$ kod kojeg je $\angle ab + \angle ac = 180°$. Dokazati da je simetrala ugla bc normalna na ivicu a.

R: Neka je poluprava c' dopuna poluprave c do prave. Kako je $\angle ab + \angle ac = 180°$, to je $\angle ac' = \angle ab$ (sl. 126). Otuda je ortogonalna projekcija ivice



Sl. 126.

a na ravan bc' simetrala ugla bc'. (Zašto?) Obeležimo tu simetralu sa s, a sa s_1 obeležimo simetralu ugla bc. Kako je $r(a, s) \perp r(b, c')$ i $s_1 \perp s$ (zašto?), to je $s_1 \perp r(a, s)$, iz čega sledi $s_1 \perp a$.

Dat je triedar koji nema pravouglih pljosni. Dokazati da se tri ravni, od kojih svaka sadrži po jednu ivicu triedra i normalna je na naspramnu pljosan, seku po jednoj pravoj.

Napomena. Prava po kojoj se seku ravni iz ovog zadatka zove se *visina triedra*.

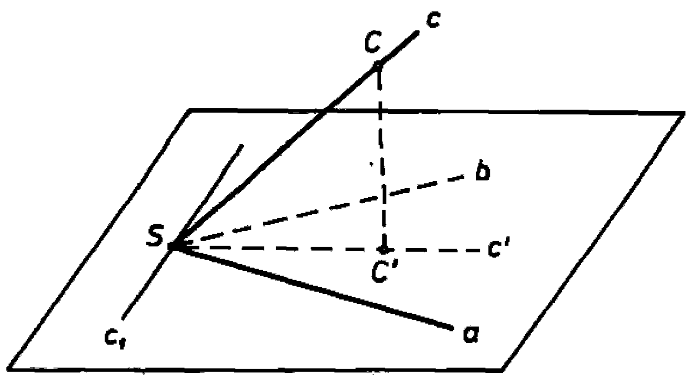
Uputa:

Obeležimo sa A, B i C tačke u kojima neka ravan π, normalna na ivicu a, seče redom ivice a, b i c. Pokazati da ravni određene ivicama triedra, a koje su normalne na naspramne pljosni, seku ravan π po pravama koje sadrže visine trougla ABC.

U svakoj od pljosni triedra koji nema pravouglih pljosni data je po jedna prava koja prolazi kroz vrh triedra i normalna je na naspramnu ivicu. Dokazati da takve tri prave pripadaju jednoj ravni.

Neka je c_1 poluprava sa početkom S koja je normalna na ivicu c i leži u ravni ab, određenoj ivicama a i b triedra $Sabc$. Obeležimo sa C' ortogonalnu projekciju proizvoljne tačke C ivice c na ravan $r(a,b)$ (sl. 127). Kako je $p(C,C') \perp r(a,b)$ i $c_1 \subset r(a,b)$, sledi $c_1 \perp p(C,C')$. Kako je i $c_1 \perp c$, to je

$$c_1 \perp r(c,c'), \tag{1}$$



Sl. 127.

gde je $c' = p(S,C')$ – ortogonalna projekcija prave određene ivicom c na ravan ab. Analogno se pokazuje da je

$$a_1 \perp r(a,a'), \tag{2}$$

$$b_1 \perp r(b,b'). \tag{3}$$

Na osnovu prethodnog zadatka, ravni aa', bb' i cc' se seku po nekoj pravoj m koja prolazi kroz tačku S. Iz (1), (2) i (3) sledi $a_1 \perp m$, $b_1 \perp m$ i $c_1 \perp m$, pa na osnovu zadatka 3., te prave pripadaju jednoj ravni.

Dokazati da se tri ravni od kojih svaka sadrži simetralu jedne pljosni i normalna je na tu pljosan, seku po jednoj pravoj.

Napomena. Prava koja se pominje u ovom zadatku zove se *simetralna prava triedra.*

Uputa: Pomenuta prava predstavlja skup tačaka jednako udaljenih od svih ivica triedra.

Zadaci za vježbu

Može li se triedar čije su sve pljosni pravougle - *pravougli triedar*, preseći sa ravni tako da se u preseku dobije trougao podudaran proizvoljnom, unapred datom, trouglu?

Dokazati da se duži određene sredinama naspramnih stranica svakog tetraedra seku se u jednoj tački koja svaku od tih duži polovi.

U nekom tetraedru je svaka ivica podudarna njoj naspramnoj ivici. Dokazati da za taj tetraedar važe sledeća tvrđenja:

(a) Prave određene sredinama naspramnih ivica su ose simetrije tetraedra koje se seku u jednoj tački, pri čemu je svaka normalna na ostale dve;

(b) Zbir ivičnih uglova svakog triedra tetraedra iznosi $180°$;

(c) Sve pljosni tetraedra su oštrougli trouglovi.

Iz jednog temena pravouglog paralelepipeda povučene su dijagonale sve tri pljosni koje sadrže to teme. Dokazati da je zbir tri ugla koji su obrazovani parovima tih dijagonala jednak $180°$.

Ako su sve pljosni tetraedra međusobno podudarni trouglovi, tada su ti trouglovi oštrougli. Dokazati.

Ako su svi diedri tetraedra međusobno podudarni, tada je taj tetraedar pravilan. Dokazati.

Ako su sve pljosni tetraedra trouglovi jednakih povšina, tada su ti trouglovi podudarni. Dokazati.

Neka je A' proizvoljna tačka u unutrašnjosti tetraedra $ABCD$. Dokazati da je zbir ivičnih uglova kod temena A', tetraedra $A'BCD$, veći od zbira ivičnih uglova kod temena A tetraedra $ABCD$. Šta se može reći o zbirovima ivica tetraedara $A'BCD$ i $ABCD$?

Upute:

Samo kada je dati trougao oštrougli. Neka su A, B i C tri proizvoljne tačke na ivicama a, b i c pravouglog triedra $Sabc$. Pokazaćemo da je trougao ABC oštrougli. Obeležimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije tačke S na prave BC, CA i AB. Kako su trouglovi BCS, CAS i ABS pravougli, na osnovu zadatka 43(a) sledi

$$(B - A_1 - C), \ (C - B_1 - A), \ (A - C_1 - B). \tag{1}$$

S druge strane, iz $a \perp b$ i $a \perp c$ sledi $a \perp r(b,c)$, odakle je (na osnovu zadatka 1159)

$$a \perp p(B,C). \tag{2}$$

Kako je i $p(S,A_1) \perp p(B,C')$, tada na osnovu (2) dobijamo $p(B,C) \perp r(A,S,A_1)$ i prema tome – $p(B,C) \perp p(A,A_1)$. Analogno se pokazuje da je $p(C,A) \perp p(B,B_1)$, i $p(A,B) \perp p(C,C_1)$.

Iz (1) i $p(B,C) \perp p(A,A_1)$ sledi da su uglovi ABC i BCA oštri. (Zašto?) Analogno se pokazuje da je i ugao CAB oštar. Dakle $\triangle ABC$ je oštrougli.

Pokazaćemo da u određenom smislu važi i obrnuto tvrđenje. Naime, za svaki oštrougli trougao $A_0B_0C_0$ mogu se naći redom tačke A, B, C na ivicama a, b, c pravouglog triedra $Sabc$, takve da je $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$.

Uočimo na ivicama a, b, c redom tačke A, B i C, takve da je

$$|SA| = \sqrt{\frac{1}{2}\,(b_0^2 + c_0^2 - a_0^2)},$$

$$|SB| = \sqrt{\frac{1}{2}\,(c_0^2 + a_0^2 - b_0^2)},$$

$$|SC| = \sqrt{\frac{1}{2}\,(a_0^2 + b_0^2 - c_0^2)},$$

gde je $a_0 = |B_0C_0|$, $b_0 = |C_0A_0|$, $c_0 = |A_0B_0|$. (Treba imati u vidu da je trougao $A_0B_0C_0$ oštrougli i da je zbog toga $b_0^2+c_0^2 > a_0^2$, $c_0^2+a_0^2 > b_0^2$, $a_0^2 + b_0^2 > c_0^2$. Iz pravouglog trougla SAB dobijamo

$$|AB| = \sqrt{|SA|^2 + |SB|^2} = c_0 = |A_0B_0|.$$

Analogno se pokazuje da je $|BC| = |B_0C_0|$ i $|CA| = |C_0A_0|$, odakle sledi $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$.

\# Uočiti četvorougao koji obrazuju sredine četiri ivice tetraedra i pokazati da je paralelogram.

\# (b) Iz $|AB| = |CD|$, $|AC| = |BD|$ i $|AD| = |BC|$ sledi $\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle DCB \cong \triangle CDA$. Ako uvedemo oznake $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$, tada je $\angle DAB = \beta$ i $\angle DAC = \gamma$, pa je

$$\angle BAC + \angle DAB + \angle DAC = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Analogno se pokazuje za ivične uglove kod ostalih temena tetraedra.

(c) S jedne strane je $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, a s druge $\alpha+\beta > \gamma$ (primeniti tvrđenje zadatka 148 na triedar sa vrhom A). Sledi $\gamma < 90^\circ$. Analogno se pokazuje da je $\alpha < 90^\circ$ i $\beta < 90^\circ$.

\# Uočiti tetraedar koji obrazuju dijagonale pljosni paralelepipeda.

\# Pokazati da su naspramne ivice tetraedra međusobno podudarne.

\# Iskoristiti zadatak 155.

\# Kroz jednu ivicu tetraedra postaviti ravan paralelnu sa naspramnom ivicom i posmatrati ortogonalnu projekciju naspramne ivice na na uočen ravan. Pokazati da su naspramne ivice međusobno podudarne.

\# (a) Prvo ćemo pokazati da tvrđenje važi u slučaju kada tačka A' pripada nekoj od ivica AB, AC, AD. Recimo ivici AB (sl. 128(a)).

Za to je potrebno da se dokaže da važi nejednakost

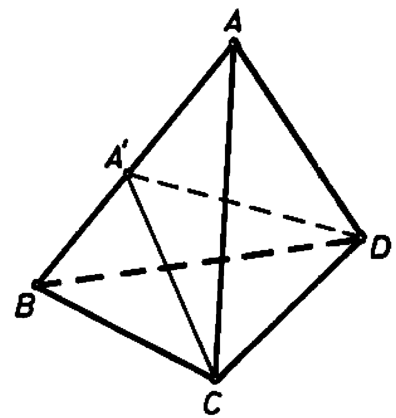
$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB. \tag{1}$$

Iz trouglova $AA'C$ i $AA'D$ sledi

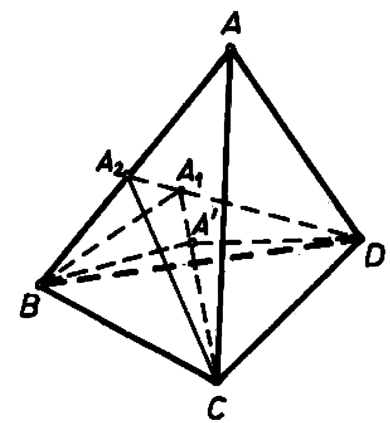
$$\angle ACA' + \angle CA'D + \angle ADA' > \angle CAD. \tag{2}$$

Kako je $\angle CA'D = 180^\circ - \angle A'CD - \angle A'DC$ i $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC$, iz (2) sledi nejednakost

$$\angle ACA' + \angle ACD + \angle ADC + \angle ADA' > \angle A'CD + \angle A'DC,$$



(a)



(b)

Sl. 128.

koja je tačna, jer je $\angle ACA' + \angle ACD > \angle A'CD$ i $\angle ADC = \angle ADA' > \angle A'DC$ (zad. 148). Prema tome nejednakost (1) važi.

Razmotrimo sada opžti slučaj. Neka tačka A' pripada unutrašnjosti tetraedra $ABCD$. Obeležimo sa A_1 presek ravni CDA' i ivice AB, a sa A_2 – presek poluprave CA' i duži A_1D (sl. 128(b)). Iz tetraedara A_2BCD i $A'BCD$ sledi

$$\angle BA'C + CA'D + \angle DA'B > \angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B.$$

Slično, iz tetraedara A_1BCD i A_2BCD sledi

$$\angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B > \angle BA_1C + CA_1D + \angle DA_1B,$$

dok iz tetraedara A_2BCD i $A'BCD$ sledi

$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BA_2C + CA_2D + \angle DA_2B.$$

Iz ove tri nejednakosti dobija se nejednakost (1).

(b) Zbir ivica tetraedra $A'BCD$ može biti i veći od zbira ivica tetraedra $ABCD$. To je, na primer, kod tetraedra $ABCD$ čiji su svi ivični uglovi kod temena A pravi i kod kojeg je $|AC| = |AD| = 1$, $|AB| = 3$, ako je A' tačka ivice AB, takva da je $|AA'| = 2$. (Proveriti.)

SPISAK AKSIOMA

Euklidska geometrija

I Aksiome incidencije (pripadanja)

I_1 Za svake dve tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

I_6 Ako su dve tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

II Aksiome poretka

II_1 Ako je $(A - B - C)$, tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C - B - A)$.

II_2 Za svake dve tačke A i B postoji tačka C, takva da je $(A - B - C)$.

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A - B - C)$, $(B - C - A)$, $(C - A - B)$.

II_4 (**Pašova aksioma**) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako važi relacija $(A - p - B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B - p - C)$ i $(C - p - A)$.

III Aksiome podudarnosti

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

III_2 Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III_3 Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom p', za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao ab, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset a'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao ab podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

III_5 Ako za trouglove ABC i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

IV Aksiome neprekidnosti

IV_1 (**Arhimedova aksioma**) Neka su AB i CD proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom AB, tako da je

$$(A - A_1 - A_2), (A_1 - A_2 - A_3), (A_2 A_3 A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj n, takav da je $(A_1 - B - A_n)$.

IV_2 (**Kantorova aksioma**) Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.

V Aksioma paralelnosti

V_E Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne seče pravu a.

Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

V_L (**Aksioma Lobačevskog**) Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoje u ravni aA bar dve prave koje su incidentne sa tačkom A i ne seku pravu a.

Euklidski prostor (elementarni zadaci)

- zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja
učenika osnovnih škola u BiH; Šefket Arslanagić-

1. U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika $2cm$ koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

2. Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Oodrediti:

a) Koliko je puta smanjena površina tijela?
b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

3. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke M i N su središta ivica AB i BC. Kako se odnose:

a) zapremine;
b) površine kocke i piramide $MBNB_1$?

4. Osnova prizme je romb. Omotač prizme je $2400\,\text{cm}^2$. Jedna dijagonala romba je 40 cm, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?

5. Dijagonala kvadra ima dužinu $d = 2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi 30°, a prema drugoj bočnoj strani 45°. Kolika je zapremina ovog kvadra?

6. Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu 120^0. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?

7. Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36cm^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.

8. Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

9. Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

10. Jednakokraki trougao čiji je obim $O=64cm$, a visina na osnovicu h_a=24cm rotira oko kraka b. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

11. Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougla ΔOAB i ΔOAC koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza OB i OC jednake $2a$. Sa S ćemo označiti središte hipotenuze OC, sa H središte duži OA, a sa M proizvoljnu tačku duži OB. Neka je x dužina duži OM.

a) Izraziti $\overline{SM}^2$ kao funkciju od a i x.
b) U općem slučaju ravan (SHM) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od a i x.

12. Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je a. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su središta bočnih ivica redom a tačka O je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

13. Ivice AB, AC i AD trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana ABC, ACD i ADB redom jednake $12cm^2, 16cm^2$ i $24cm^2$.

14. Kocka ivice a presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

15. Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od 60%. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.

16. Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice a (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od 30°, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2{:}3$. Kolika je visina prizme?

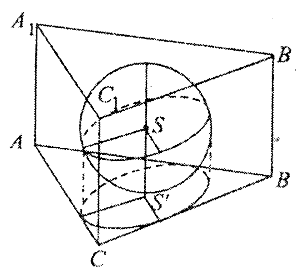
#) U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika $2cm$ koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

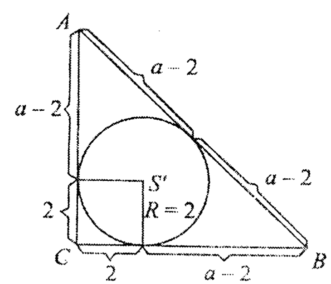
R: Neka je $ABCA_1B_1C_1$ trostrana prizma čija je osnova jednakokraki pravougli trougao ΔABC ($\measuredangle C = 90^0$) u koju je upisana lopta poluprečnika $R = 2cm$ tako da dodiruje sve njene strane. Visina prizme je $H = 2R = 4cm$. Da bismo izračunali površinu baze, izračunaćemo dužine stranica ΔABC. Koristeći činjenice da je ΔABC jednakokraki i pravougli i jednakost tangentnih duži, na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$a^2 + a^2 = (2a^2 - 4)^2$$

odnosno

$$a^2 - 8a + 8 = 0.$$





Zapišemo li posljednju jednačinu u obliku $(a-4)^2 = 8$, dobićemo da je $a = (4+2\sqrt{2})cm$ ili $a = (4-2\sqrt{2})cm$. Vrijednost $a = (4-2\sqrt{2})$ ne zadovoljava: hipotenuza trougla ΔABC je $2a-4$, a $2a-4 = 2(4-2\sqrt{2})-4 = 4-4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2}) < 0$.

Dakle, $a = (4+2\sqrt{2})cm$.

Površina baze je

$$B = \frac{(4+2\sqrt{2})^2}{2}cm^2 = (12+8\sqrt{2})cm^2.$$

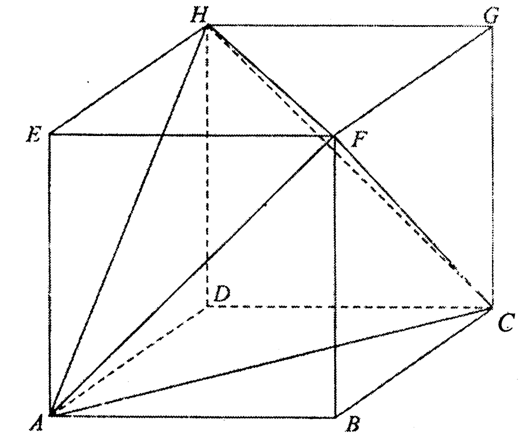
Zapremina prizme je

$$V = B \cdot H = \left(12+8\sqrt{2}\right) \cdot 4cm^3.$$

#) Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonałe strana kocke. Oodrediti:

a) Koliko je puta smanjena površina tijela?
b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

R: Neka je dužina ivice kocke $ABCDEFGH$ jednaka a_k. Površina kocke je $P_k = 6a_k^2$, a njena zapremina je $V_k = a_k^3$. Tetraedar $ACFH$ ima ivicu dužine $a_t = a_k\sqrt{2}$. Površina tetraedra je



$$P_t = 4\frac{a_t^2\sqrt{3}}{4} = a_t^2\sqrt{3},$$

odnosno

$$P_t = \left(a_k\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} = 2a_k^2\sqrt{3}.$$

Zapremina tetraedra je $V_t = 4\frac{a_t^3\sqrt{2}}{12}$,

odnosno

$$V_t = \frac{\left(a_k\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a_k^3}{3}.$$

a) Površina tijela je smanjena za

$$P_k - P_t = 6a_k^2 - 2_k^2\sqrt{3} = 2a_k^2\left(3-\sqrt{3}\right),$$

ili smanjena je

$$\frac{P_k}{P_t} = \frac{6a_k^2}{2a_k^2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ puta.}$$

b) Zapremina tijela je smanjena za

$$V_k - V_t = a_k^3 - \frac{a_k^3}{3} = \frac{2}{3}a_k^3,$$

ili smanjena je

$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{a_k^3}{\frac{a_k^3}{3}} = 3 \text{ puta.}$$

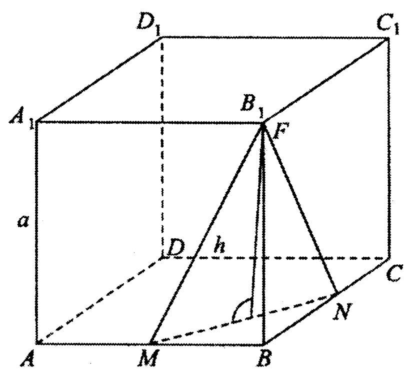
\# Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke M i N su središta ivica AB i BC. Kako se odnose:

a) zapremine;

b) površine kocke i piramide $MBNB_1$?

Rj. Označimo dužinu ivica kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa a. Tada imamo:

$$\overline{MN}=\overline{BN}=\frac{a}{2},\ \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$



$$\overline{MB_1}=\overline{NB_1}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$h=\sqrt{\overline{MB_1}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{MN}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}a^2-\frac{1}{8}a^2}=\sqrt{\frac{9}{8}a^2}=\frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

a) $V_{koc.}=a^3,\ V_{pir.}=\frac{1}{3}P_{\Delta BMN}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\frac{1}{24}a^3$,

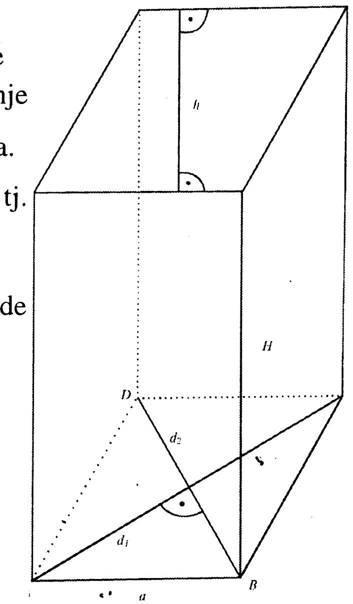
pa je $V_{koc.}:V_{pir.}=a^3:\frac{1}{24}a^3=24:1$.

b) $P_{koc.}=6a^2$,

$$P_{pir}=P_{\Delta BMN}+P_{\Delta BMB_1}+P_{\Delta BNB_1}+P_{\Delta MNB_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}}=a^2,$$

pa je $P_{koc.}:P_{pir.}=6a^2:a^2=6:1$.

\# Osnova prizme je romb. Omotač prizme je $2400\,\text{cm}^2$. Jedna dijagonala romba je 40 cm, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?



Rj. Neka je osnovna ivica prizme a. Tada je $M=4aH=2400$, pa je $a=\frac{600}{H}$. Rastojanje naspramnih bočnih strana prizme je visina h romba.

Površina romba je $B=ah=h\cdot\frac{600}{H}=H\cdot\frac{600}{H}$, tj. $B=600cm^2$ jer je $h=H$ po uslovu zadatka.

Kako je $B=\frac{d_1d_2}{2}$, imamo $600=\frac{40\cdot d_2}{2}$, tj. odavde $d_2=30cm$.

Kako je $a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=20^2+15^2=625$,

imamo $a=25cm$, te $H=\frac{600}{a}=\frac{600}{25}=24dm$.

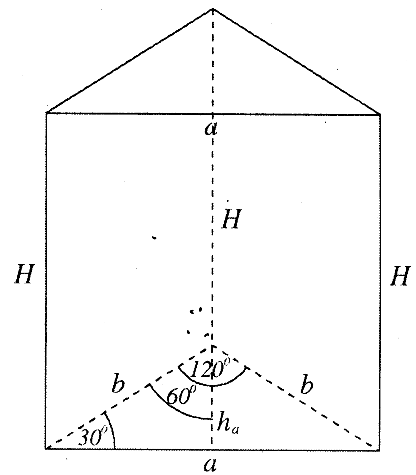
Dakle, zapremina prizme iznosi

$V=BH=600\cdot 24=14400cm^2$.

\# Dijagonala kvadra ima dužinu $d=2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi 30°, a prema drugoj bočnoj strani 45°. Kolika je zapremina ovog kvadra?

Rj. Ugao između prave i ravni jednak je uglu između te prave i njene projekcije na tu ravan. Zbog toga treba dijagonalu kvadra projicirati na obje bočne strane. U jednom slučaju dobijamo pravougli trougao sa uglovima 30^0 i 60^0, a u drugom slučaju sa uglovima 45^0. Neka dijagonala CE sa bočnom stranicom $ADHE$ zaklapa ugao od 30^0. Tada je projekcija dijagonale CE na tu stranicu duž DE. Trougao ΔDCE je pravougli trougao u kojem je $\measuredangle DEC=30^0$ i $\measuredangle CDE=90^0$. Tada je $\overline{ED}=\overline{DC}\sqrt{3}=\frac{CE\sqrt{3}}{2}=\frac{d\sqrt{3}}{2}$. Neka je $\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{EA}=c$. Tada je $\overline{ED}=\sqrt{b^2+c^2}$ i $\overline{CD}=a$. Tako imamo $\sqrt{b^2+c^2}=a\sqrt{3}$. Nakon kvadriranja imamo $b^2+c^2=3a^2$. Po pretpostavci zadatka dijagonala CE sa stranicom $ABFE$ gradi ugao od 45^0. Projekcija EC na tu bočnu stranicu je EB. Tada je trougao ΔEBC jednakokraki i pravougli, pa je $\overline{BC}=\overline{EB}$, tj. $\sqrt{a^2+c^2}=b$. Odavde je $a^2+c^2=b^2$. Sada nalazimo da je $a=c$ i $b=a\sqrt{2}$. Zapremina kvadra je $V=abc=a^3\sqrt{2}$. Kako je $a^2+b^2+c^2=d^2$, to je $a=\frac{d}{2}$. Dakle, $V=\frac{d^3\sqrt{2}}{8}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3\cdot\sqrt{2}}{8}=4$.

\# Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu 120^0. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?



Rj. Neka je b krak jednakokrakog trougla osnovice a i visine h_a koja odgovara osnovici. Tada visina baze iz vrha ugla od 120^0 razlaže trougao na dva podudarna trougla sa uglovima od 60^0 i 30^0, pa je $h_a = \frac{b}{2}, \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, tj. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a odavde

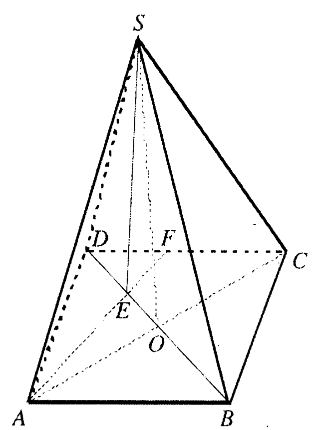
$$h_a = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Sada je $\quad B = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}},\ M = 2B = \frac{a^2}{2\sqrt{3}},$

$$M = aH + 2bH = (a + 2b)H = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow \frac{a^2}{2\sqrt{3}} = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{a^2}{2\sqrt{3}}}{a\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2(2+\sqrt{3})},\quad V = B \cdot H = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{a^3}{8\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}.$$

\# Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida (S - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36cm^3$. Ako je tačka O centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka F središte ivice CD i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.



Rj. Data piramida $SABCD$ i piramida $SOEFC$ imaju jednake visine pa je

$$\frac{V(SOEFC)}{V(SABCD)} = \frac{P(OEFC)}{P(ABCD)} \quad (P \text{ - površina baze}).$$

Tačka E je očigledno težište ΔACD (jer su AF i DO njegove težišnice), pa je

$$P(OEFC) = \frac{1}{3}P_{\Delta ACD} = \frac{1}{6}P(ABCD).$$

Dakle, $\quad V(SOEFC) = \frac{1}{6}V(SABCD) = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6cm^3.$

\# Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za 200%, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

Rj. Označimo sa r i H poluprečnik baze i visinu valjka, respektivno, a sa r_1 i H_1 označimo poluprečnik baze i visinu novodobijenog valjka. Prema uvjetima zadatka imamo $r_1 = 3r$ i $H_1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)H$, i na osnovu toga:

$$V_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)V \Leftrightarrow r_1^2\pi H_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)r^2\pi H \Leftrightarrow 9r^2\pi\left(1 - \frac{p}{100}\right)H = \left(1 + \frac{p}{100}\right)r^2\pi H$$

$$\Leftrightarrow 9\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 80\%.$$

Označimo sa M površinu omotača polaznog valjka, a sa M_1 površinu omotača novodobijenog valjka. Tada je

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2r_1\pi H_1}{2r\pi H} = \frac{3r\left(1 - \frac{p}{100}\right)H}{rH} = 3\left(1 - \frac{80}{100}\right) = 0{,}6.$$

Dakle, površina omotača se smanjila za 40%.

\# Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

Rj. Koristeći $A-G$ nejednakost za tri pozitivna broja, imamo

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{\pi}{3}r \cdot r \cdot H \le \frac{\pi}{3}\left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72\pi,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi kada je $r = H = 6$, tj. u tom slučaju kupa ima najveću zapreminu. Njena izvodnica ima dužinu $s = \sqrt{r^2 + H^2} = 6\sqrt{2}$, a površina joj je

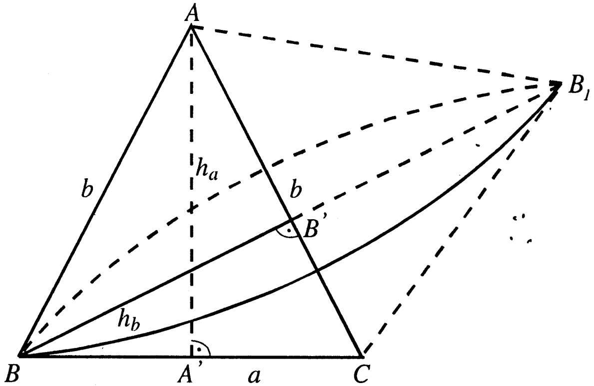
$$P = r\pi(r + s) = 36\pi(1 + \sqrt{2}).$$

Jednakokraki trougao čiji je obim $O=64cm$, a visina na osnovicu h_a=24cm rotira oko kraka b. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

Rj. Obim trougla ΔABC je $a+2b$, tj. $a+2b=64$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\Delta AA'B$ nalazimo

$$h_a^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ tj.}$$

$$24^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



Sada iz sistema jednačina

$$a+2b=64,$$

$$b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=24^2,$$

nalazimo: $b=25cm$ i $a=14cm$.

Kako je $P_{\Delta ABC}=\dfrac{14\cdot 24}{2}=168cm^2$ i $P_{\Delta ABC}=\dfrac{25\cdot h_b}{2}$, to iz jednačine $168=\dfrac{25\cdot h_b}{2}$ nalazimo $h_b=\dfrac{336}{25}cm$.

Rotaciono (obrtno) tijelo sastoji se iz dvije kupe sa zajedničkom osnovom poluprečnika $r=h_b=\dfrac{336}{25}cm$, bočnih ivica $b=25cm$ i $a=14cm$, visina $\overline{AB'}$ i $\overline{B'C}$. Površinu čine omotači ovih kupa i ona iznosi

$$P=M_1+M_2=h_b b\pi+h_b a\pi=(a+b)h_b\pi=\frac{13104}{25}\pi\ cm^2.$$

Zapremina je

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}h_b^2\pi\cdot\overline{AB'}+\frac{1}{3}h_b^2\pi\cdot\overline{B'C}=\frac{1}{3}h_b^2\pi\left(\overline{AB'}+\overline{B'C}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h_b^2\pi b=\frac{37632}{25}\pi\ cm^3.$$

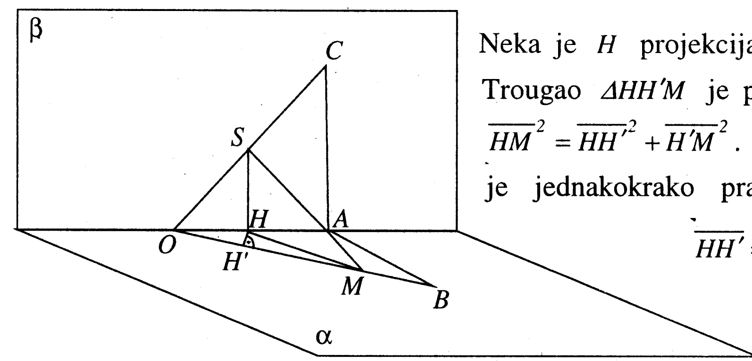
Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougla ΔOAB i ΔOAC koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza OB i OC jednake $2a$. Sa S ćemo označiti središte hipotenuze OC, sa H središte duži OA, a sa M proizvoljnu tačku duži OB. Neka je x dužina duži OM.

a) Izraziti $\overline{SM}^2$ kao funkciju od a i x.

b) U općem slučaju ravan (SHM) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od a i x.

Rj. Neka su ravni α i β međusobno okomite. Neka pravougli jednakokraki trougao ΔOAB pripada ravni α a njemu podudaran trougao ΔOAC ravni β. Trougao ΔSHM je pravougli, pa je $\overline{SM}^2=\overline{SH}^2+\overline{HM}^2$. SH je srednja linija trougla ΔOAC, pa je $\overline{SH}=\frac{1}{2}\overline{CA}$. Budući da je trougao ΔOAC jednakokraki pravougli, to je

$$\overline{OC}=\overline{AC}\cdot\sqrt{2} \text{ i } \overline{OA}=\overline{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OC}=\frac{2a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2};\ \overline{SH}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Neka je H projekcija tačke H na OB. Trougao $\Delta HH'M$ je pravougli, pa je $\overline{HM}^2=\overline{HH'}^2+\overline{H'M}^2$. Trougao $\Delta OHH'$ je jednakokrako pravougli, pa je

$$\overline{HH'}=\overline{OH'}=\frac{a}{2}.$$

Dalje, imamo

$$\overline{H'M}=\overline{OM}-\overline{OH'}=x-\frac{a}{2}, \text{ pa je } \overline{HM}^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ i}$$

$$\overline{SM}^2=\overline{HM}^2+\overline{SH}^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=x^2-ax+a^2.$$

b) Imamo

$$V_1=\frac{1}{3}P_{\Delta OHM}\cdot\overline{SH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2x\sqrt{2}}{24}\quad=\frac{1}{3}P_{\Delta OAB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}$$

Dakle, $$V_2=V-V_1=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}-\frac{a^2x\sqrt{2}}{24}=\frac{a^2\sqrt{2}}{24}(8a-x) \text{ i } V_1:V_2=x:(8a-x).$$

#

Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je a. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su središta bočnih ivica redom a tačka O je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

Rj. Tijelo $OA_1B_1C_1D_1S$ je oktaedar. Visina bočne strane, tj. visina jednakostraničnog trougla je

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Visina piramide je

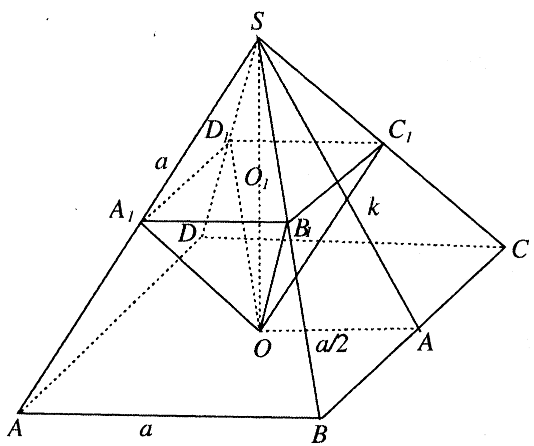
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Površina oktaedra je

$$P_{okt.} = 8\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

a zapremina

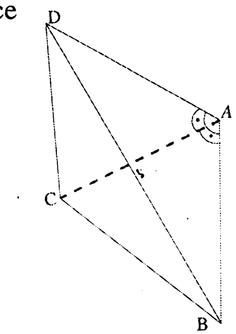
$$V_{okt.} = 2\cdot V_{A_1B_1C_1D_1S} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$



#

Ivice AB, AC i AD trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana ABC, ACD i ADB redom jednake $12cm^2, 16cm^2$ i $24cm^2$.

Rj. Neka je $ABCD$ uspravna trostrana piramida kod koje su ivice AB, AC i AD uzajamno normalne i površine strana su



$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 12cm^2; \qquad P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 16cm^2,$$

$$P_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD} = 24cm^2.$$

Zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{6}\sqrt{\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2\cdot\overline{AD}^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot 12\cdot 16\cdot 24}cm^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\sqrt{2^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^4\cdot 3\cdot 2^3}cm^2 = \frac{1}{6}\sqrt{2^{12}\cdot 3^2}cm^2 = \frac{1}{6}\cdot 2^6\cdot 3cm^2 = 2^5cm^2 = 32cm^2.$$

#

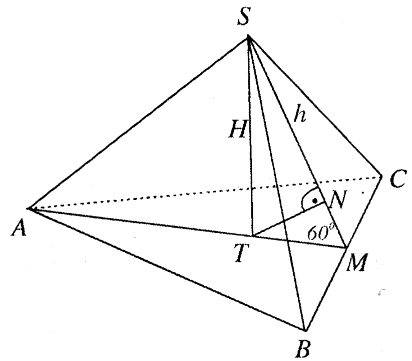
Kocka ivice a presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

Rj. Neka je presjek kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa datom ravni jednakokraki trapez BC_1NM, gdje su M i N redom središta ivica A_1D_1 i A_1A. Osnovice trapeza su $\overline{BC_1} = a\sqrt{2}$ i $\overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a kraci $\overline{BM} = \overline{C_1N}$.

Imamo $\overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AN}^2 = \frac{5a^2}{4}$ i visina trapeza je $h = \sqrt{\overline{BM}^2 - \overline{BP}^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$, jer je $\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC_1} - \overline{MN}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Površina trapeza je $P = \frac{9a^2}{8}$.

\# Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od 60%. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.

R. Baza date piramide je jednakostranični trougao ΔABC, dok omotač sačinjavaju tri podudarna jednakokraka trougla. Dato rastojanje baze od bočne strane je duž TN, gdje N leži na visini bočne strane. Uočimo da je pravougli trougao ΔMNT polovina jednakostraničnog trougla, pa je $\overline{MT} = 2\overline{MN}$.



Prema Pitagorinoj teoremi imamo

$$\overline{MT}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NT}^2 \Rightarrow \overline{MT}^2 = \frac{1}{4}\overline{MT}^2 + 3^2 \Rightarrow \frac{3}{4}\overline{MT}^2 = 9 \quad \Rightarrow \overline{MT}^2 = 12 \Rightarrow \overline{MT} = 2\sqrt{3}.$$

Zbog toga je $\overline{AM} = 3\overline{MT} = 6\sqrt{3}$. AM je visina trougla ΔABC, dakle, vrijedi

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = a = 12cm.$$

Dakle,

$$B = P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

Uočimo da je i pravougli trougao ΔSMT polovina jednakostraničnog trougla i da je $\overline{SM} = 2\overline{MT}$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ΔSMT imamo:

$$\left(2\overline{MT}\right)^2 - \overline{MT}^2 = \overline{ST}^2 = H^2 \Rightarrow H^2 = 3\overline{MT}^2 = 36 \Rightarrow H = 6cm$$

pa možemo izračunati zapreminu date piramide $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}cm^3$.

Dalje, površina omotača piramide je

$$M = 3 \cdot P_{\Delta BCS} = 3 \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{SM}}{2} = 3 \cdot \frac{a \cdot 2\overline{MT}}{2} = 3a \cdot \overline{MT} = 3 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3},$$

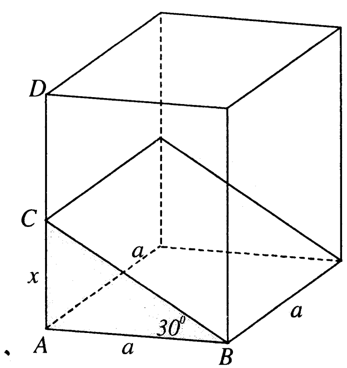
$$M = 72\sqrt{3}cm^2.$$

Površina piramide je $P = B + M = 108\sqrt{3}cm^2$.

\# Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice a (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od $30°$, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2:3$. Kolika je visina prizme?

R. Manji odsječak date prizme je trostrana prizma čija je visina i jedna ivica baze dužine a, a druga ivica baze, kateta trougla ΔABC je $\overline{AC} = x$. Trougao ΔABC je polovina jednakostraničnog trougla (jer je $\measuredangle ACB = 60^0$) pa je $\overline{AB} = a$ visina tog trougla a baza mu je $2x$. Zbog toga je:

$$a = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



Zapremina ove trostrane prizme je: $V_1 = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. Zapremina date prizme je $V = a^2H$, gdje je H visina čija se dužina traži. Prema uvjetu zadatka, zapremina trostrane prizme čini $\frac{2}{5}$ zapremine date prizme, tj.

$$V_1 = \frac{2}{5}V \Rightarrow \frac{a^3}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{5}a^2H \Rightarrow H = \frac{5a}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}cm.$$